

修士論文

場の理論一般純粋化パートナーと量子エンタングルメント

General Purification Partners and Quantum Entanglement
in Field Theory

東北大学大学院理学研究科

物理学専攻

富塚 健志

目次

1	イントロダクション	3
2	量子情報の基礎	5
2.1	密度演算子	5
2.2	Schmidt 分解	6
2.3	純粋化 (purification)	7
2.4	積状態とエンタングル状態	8
2.5	非ユニタリー過程と CPTP 写像	8
2.6	量子測定	10
2.6.1	射影測定	10
2.6.2	間接測定	10
2.7	LOCC	13
2.8	量子エンタングルメントエントロピー	14
2.9	Page の定理	16
2.10	Gauss 状態における量子情報	18
2.10.1	N 調和振動子系	18
2.10.2	2 モードシンプレクティック変換	21
3	Unruh 効果	23
3.1	自由スカラー場の量子化	23
3.2	Bogoliubov 変換	25
3.3	慣性系の場の量子論	26
3.4	一様加速度系の場の量子論	27
3.5	Unruh 効果と真空の量子エンタングルメント	29
3.6	真空のエンタングルメントエントロピー	34
4	Hawking 輻射	37
4.1	球対称重力崩壊過程を記述する時空	37
4.2	Hawking 輻射の導出	38
4.2.1	場の量子化	39
4.2.2	粒子の生成	40
4.3	情報喪失問題	43
4.3.1	ブラックホールの蒸発過程	43
4.3.2	ブラックホール熱力学の 4 法則	44
4.3.3	情報損失問題	48

4.4	Page 曲線	49
5	動的鏡模型	51
5.1	Hawking 輻射を模した動的鏡模型	51
5.2	Hawking 輻射の量子エンタングルメント	57
6	純粋化パートナー	63
6.1	純粋化パートナーの定義	63
6.2	純粋化パートナーの存在証明	63
6.3	Gauss 真空状態の純粋化パートナー	65
6.4	一般の Gauss 状態の純粋化パートナー	69
6.5	曲がった空間での純粋化パートナー	72
6.6	純粋化パートナーの性質	75
6.7	動的鏡模型における純粋化パートナー	76
7	まとめと今後の展望	87
付録 A	(S3) の証明	89
付録 B	(S3') の証明	91
付録 C	ユニタリ群上の積分	92
付録 D	A のシンプレクティック変換	93
付録 E	時空のエネルギー	95

1 イントロダクション

ブラックホールは Einstein の一般相対論が持つ解の一つであり、現在では我々の宇宙に天体として存在することが観測から明らかになっている。一般相対論は重力の古典理論であり、量子力学的な効果は含まれていない。1975 年、Hawking は重力崩壊を起こしブラックホールを形成する過程を表す時空上での量子場の理論を考えると、ブラックホールが一定のエネルギーフラックスをもつ熱輻射を放出することを示した。[5]。この輻射は Hawking 輻射と呼ばれる。このことは古典的には光さえ逃れることのできない天体から、輻射によりブラックホールのエネルギーが徐々に持ち出され、最終的には完全に蒸発してしまう可能性があることを意味している。

もしブラックホールが完全に蒸発して輻射のみが残る場合、輻射が完全に熱的な混合状態のままならば、純粋状態にある崩壊物質を用意しても、最終的に混合状態の輻射だけが残ることになる。しかし量子力学のユニタリー性からはこのような時間発展は許されない。一般に混合状態にある量子系は、別のある補助量子系が存在して、それらを合わせた合成系が純粋状態にできる。これは状態の純粋化と呼ばれており、この視点から言えば、蒸発後に輻射と量子的にエンタングルしている補助系が存在しないことは、純粋状態に蓄えられていた量子情報の一部が失われたことを意味する。このためこのユニタリー性の破れる可能性は、情報損失問題と呼ばれ、Hawking 自身によって指摘された [18]。

量子重力の効果が効きだすと考えられる蒸発の最終段階では、既存の量子力学が成り立たず、そのためにユニタリー性が破れている可能性もあるが、近年の超弦理論の発展、特に AdS/CFT 対応により、ブラックホールからの輻射に事象の地平面内部の情報がすべて含まれることが示唆されたため、ユニタリー性を保った蒸発シナリオが活発に議論されるようになった。Hawking 輻射を純粋化する補助量子系は、その純粋化パートナーと呼ばれる。この純粋化パートナーに関してはこれまでもいくつか候補があげられているが、本論文では特に、Wilczek により 1992 年にブラックホールの蒸発過程を模した動的鏡模型と呼ばれる模型を使って示された、輻射場の真空の零点振動が Hawking 輻射と大量の量子エンタングルメントを共有できる可能性 [12] について言及する。このことは Hawking 輻射の純粋化パートナーはエネルギーを持つ必要がないという重要な知見である。

また量子もつれの一般的な性質であるモノガミー性（一夫一妻制）から、それだけで純粋状態にある系は、他の系との間に量子エンタングルメントを持ってない。すなわち情報が外部に漏れない系であるから、純粋化パートナーの研究はブラックホールの文脈だけでなく、量子暗号や量子コンピューターといった量子工学の分野でも重要である。例えばブラックホール物理学にも応用できる、量子場から量子もつれを取り出すエンタングルメントハーベスティングという量子プロトコルでは、パートナーを使って純粋化された量子系を用いることで、その効率を高めることもできる [22]。

これらを受けて、本論文では量子場の理論における純粋化パートナーの最近の研究の報告を行う。

特に量子場の理論におけるガウス状態に対しては、部分系 A を調和振動子の正準演算子のセットで与えたときに、その純粋化パートナーである部分系 B を指定する演算子を求める公式を構築することが具体的にでき、それは場の 2 点関数を用いて表されることがトレビソン-山口-堀田によって示された [22]。この公式から A とその純粋化パートナー B は一般には空間的な重なりを持ち、空間的に離れたパートナーは特殊な例であることがわかる。Hawking 輻射の純粋化パートナーとしてこれまで求められていたものは、空間的に離れたパートナーであったため、空間的に重なりをもった純粋化パートナーは情報損失問題に新たな知見をもたらす可能性がある。

本論文の構成は以下のようになっている。まず第 2 章では量子情報理論の基礎部分を解説し、量子エンタングルメントの概念を導入する。ここでは後の議論のために Gauss 状態における量子情報についても解説している。第 3 章では、量子場の理論における真空の不定性に由来する Unruh 効果を解説し、真空の量子エンタングルメントについて解説する。4 章では Hawking 本人による Hawking 輻射の導出と、ブラックホールのダイナミクス、情報損失問題について述べる。第 5 章では Hawking 輻射やブラックホールの蒸発過程を模した動的鏡模型を用いて、Hawking 輻射の量子エンタングルメントおよびその純粋化パートナーについて言及する。第 6 章では、ブラックホールの文脈を超え、さらに一般的な Gauss 状態について、純粋化パートナーを求める方法と、純粋化パートナーの持つ性質について解説する。また、その手法を動的鏡模型に適用した場合についても考察した。

本論文では特に断らない限り $\hbar = c = G = k_B = 1$ の単位系を用いる。

2 量子情報の基礎

ここでは量子情報理論の基礎として重要な種々の概念の導入を行う [1][7].

2.1 密度演算子

まず量子状態を記述するために、Hilbert 空間 \mathcal{H} に作用する演算子として、密度演算子 $\hat{\rho}$ を次の性質を満たすものとして定義する.

1. $\hat{\rho}$ は Hermite 演算子である : $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$
2. $\hat{\rho}$ は非負演算子である : $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle \geq 0$
3. $\text{Tr}[\hat{\rho}] = 1$

密度演算子がノルム 1 のベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ を用いて

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (2.1.1)$$

と書けるとき、純粋状態といい、そうでない状態を混合状態という.

純粋状態の場合、条件 3 に加えて

$$\text{Tr}[\hat{\rho}^2] = 1 \quad (2.1.2)$$

が成り立つ. また一般に

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.1.3)$$

と書ける. ここで w_i は $\sum_i w_i = 1$ を満たす非負数で, $\{|\psi_i\rangle\} \in \mathcal{H}$ は互いに直交している必要はない.

純粋状態は $w_i = 1$ の場合に対応し, 状態が単一の $|\psi\rangle$ のみで特徴づけられる. 一方混合状態は割合 w_i で状態 $|\psi_i\rangle$ が混合している状態である. 特に正規直交状態が均一に混合している $\hat{\rho} = \frac{\hat{I}}{d}$ ($d = \dim \mathcal{H}$, \hat{I} は恒等演算子) の混合状態を最大混合状態という.

(2.1.2) の左辺の量はピュリティ $\mu(\hat{\rho})$ と呼ばれ, $\frac{1}{d} \leq \mu(\hat{\rho}) \leq 1$ を満たす, 状態がどれほど純粋状態に近いかを測る指標で $\mu(\hat{\rho}) = 1$ が純粋状態, $\frac{1}{d}$ のときが最大混合状態である.

$\hat{\rho}$ で記述される状態での物理量 \hat{A} の期待値は

$$\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{A}] \quad (2.1.4)$$

で計算される.

状態が純粋状態か混合状態かを判断する量として, 次で定義される Von-Neumann エントロピー

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}] \quad (2.1.5)$$

が用いられる. $S(\hat{\rho})$ は次の性質をもつ

- 任意のユニタリ演算子 U に対し, $S(\hat{U}^\dagger \hat{\rho} U) = S(\hat{\rho})$
- $S(\hat{\rho}) \geq 0$ 等号成立は $\hat{\rho}$ が純粋状態のときである.
- $S(\hat{\rho}) \leq \ln d$ 等号成立は $\hat{\rho}$ が最大混合状態のときである.
- $\sum_i \lambda_i = 1$ を満たす非負数 λ_i に対し, $S(\sum_i \lambda_i \hat{\rho}_i) \geq \sum_i \lambda_i S(\hat{\rho}_i)$

最後の性質は凹性と呼ばれ, 各状態を平均化した状態のエントロピーは, 個々の状態のエントロピーの平均と等しいかそれよりも大きいことを示している.

Hilbert 空間 \mathcal{H} が

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (2.1.6)$$

と書けるとき, 合成系 AB と呼ぶ. $|a\rangle, |b\rangle$ をそれぞれ $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ の完全系とすると, Hilbert 空間 \mathcal{H} は $|a\rangle \otimes |b\rangle \equiv |a\rangle |b\rangle$ で張られる. この空間に作用する積演算子 $\hat{M}_A \otimes \hat{N}_B$ は

- $(\hat{M}_A \otimes \hat{N}_B)(\hat{M}'_A \otimes \hat{N}'_B) = \hat{M}_A \hat{M}'_A \otimes \hat{N}_B \hat{N}'_B$
- $\text{Tr}[\hat{M}_A \otimes \hat{N}_B] = \text{Tr}[\hat{M}_A] \text{Tr}[\hat{N}_B]$
- $(\hat{M}_A \otimes \hat{N}_B)^\dagger = \hat{M}_A^\dagger \otimes \hat{N}_B^\dagger$

を満たすものとして定義する. この合成系の状態 $\hat{\rho}_{AB}$ に対し, A の縮約された密度行列を

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B[\hat{\rho}_{AB}] \quad (2.1.7)$$

で定義する. 成分で書くと

$$\langle a' | \hat{\rho}_A | a \rangle = \sum_b \langle a' | \langle b | \hat{\rho}_{AB} | a \rangle | b \rangle \quad (2.1.8)$$

である. B に関する縮約された密度行列も同様である.

A 系にのみ非自明な作用する演算子 $\hat{\Pi}_i \otimes \hat{I}_B$ を考えると, 状態 $\hat{\rho}_{AB}$ におけるその期待値は

$$P(i) = \text{Tr}[\hat{\rho}_{AB}(\hat{\Pi}_i \otimes \hat{I}_B)] = \text{Tr}_A[\hat{\rho}_A \hat{\Pi}_i] \quad (2.1.9)$$

と $\hat{\rho}_A$ から計算される.

2.2 Schmidt 分解

合成系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ($\dim \mathcal{H}_A \leq \dim \mathcal{H}_B$) における純粋状態 $|\psi\rangle$ は常に次の形に分解できることが知られている.

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_A |i\rangle_B \quad (2.2.10)$$

ここで p_i は $p_i \in [0, 1]$, $\sum_i p_i = 1$ を満たす定数で, $|i\rangle_A, |i\rangle_B$ はそれぞれ $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ の正規直交基底である. これを Schmidt 分解という.

証明は以下のようにできる.

(証明)

$|j\rangle, |k\rangle$ をそれぞれ A, B 系の正規直交基底とすると,

$$|\psi\rangle = \sum_{jk} a_{jk} |j\rangle |k\rangle \quad (2.2.11)$$

と書ける. 複素行列 $a = \{a_{jk}\}$ はユニタリ行列 u, v により $a = udv$ と特異値分解できる. ここで d は非負成分をもつ対角行列である. よって

$$|\psi\rangle = \sum_{ijk} u_{ji} d_{ii} v_{ik} |j\rangle |k\rangle \quad (2.2.12)$$

となる. ここで $|i\rangle_A \equiv \sum_j u_{ji} |j\rangle$, $|i\rangle_B \equiv \sum_k v_{ik} |k\rangle$, $\sqrt{p_i} \equiv d_{ii}$ と定義すると, u, v がユニタリ行列であることと, $|j\rangle, |k\rangle$ が正規直交基底であることから, $|i\rangle_A, |i\rangle_B$ が正規直交基底をなすことが分かり, (2.2.10) と書ける. □

$|i\rangle_A, |i\rangle_B$ をそれぞれ A, B の Schmidt 基底といい, 非零の p_i の数を状態 $|\psi\rangle$ に対する Schmidt 数という.

2.3 純粋化 (purification)

任意の混合状態はより大きな量子系の純粋状態として記述することが常にできる. すなわち, ある A 系の状態 $\hat{\rho}_A$ が与えられると, $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_R[|AR\rangle\langle AR|]$ となる純粋状態 $|AR\rangle$ を作る補助系 R が必ず存在する. (ただし $\dim\mathcal{H}_R \geq \dim\mathcal{H}_A$) これを混合状態の純粋化 (purification) という. このことは Schmidt 分解から直ちに示すことができる.

まず, A の正規直交基底で $\hat{\rho}_A = \sum_i p_i |i\rangle_A \langle i|_A$ と分解する. 補助系 R の Hilbert 空間の次元を A の Hilbert 空間の次元より大きいとし, その中で互いに直交する単位ベクトル $|i\rangle_R$ を $\dim A$ 本だけ持ってきて

$$|AR\rangle \equiv \sum_i^{\dim A} \sqrt{p_i} |i\rangle_A |i\rangle_R \quad (2.3.13)$$

という純粋状態を構成する. これは Schmidt 分解から常に可能である. この状態で R に関する部分トレースをとれば,

$$\begin{aligned} \text{Tr}_R[|AR\rangle\langle AR|] &= \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |i\rangle_A \langle j|_A \text{Tr}[|i\rangle_R \langle j|_R] \\ &= \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |i\rangle_A \langle j|_A \delta_{ij} \\ &= \sum_i p_i |i\rangle_A \langle i|_A \\ &= \hat{\rho}_A \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

となり, A 系が補助系 R によって純粋化されていることがわかる. ただし R の基底をユニタリ変換する不定性はある, その意味では純粋化の仕方は一意ではない.

2.4 積状態とエンタングル状態

合成系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ の状態ベクトルは一般に規格化条件 $\sum_{ij} |c_{ij}|^2 = 1$ を満たす複素数 c_{ij} , \mathcal{H}_A の正規直交基底 $\{|\psi_i\rangle\}$, \mathcal{H}_B の正規直交基底 $\{|\phi_j\rangle\}$ を用いて

$$\sum_{ij} c_{ij} |\psi_i\rangle |\phi_j\rangle \quad (2.4.15)$$

と書ける. 特に A の状態が $|\psi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle$, B の状態が $|\phi\rangle = \sum_j b_j |\phi_j\rangle$ のとき, 合成系の状態は

$$|\psi\rangle |\phi\rangle = \sum_{ij} a_i b_j |\psi_i\rangle |\phi_j\rangle \quad (2.4.16)$$

となる. このように合成系の状態が部分系の状態の積でかけるとき, 積状態 (product state) であるという. また今のように合成系が純粋状態の場合はセパラブル (separable) 状態ともいう. そうでない状態, 例えば

$$\sum_i c_i |\psi_i\rangle |\phi_i\rangle \quad (2.4.17)$$

は部分系の状態の積では書けない状態で, エンタングルした (entangled) 状態と呼ばれる. 合成系が混合状態の場合は, 部分系 A,B それぞれの密度演算子 $\{\hat{\rho}_A^{(i)}\}, \{\hat{\rho}_B^{(i)}\}$ を用いて

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_i q_i \hat{\rho}_A^{(i)} \otimes \hat{\rho}_B^{(i)} \quad (2.4.18)$$

と書けるとき, この状態をセパラブル状態と呼ぶ. 混合状態の場合は特に

$$\hat{\rho}_{AB} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B \quad (2.4.19)$$

と書けるときを積状態と呼ぶ.

純粋状態に対しては, Schmidt 分解 (2.2.10) から, 非零の p_i が 2 つ以上あるとき (Schmidt 数が 2 以上) がエンタングルした状態, そうでない, すなわち非零の p_i がただ 1 つで $p_i = 1$ のとき積状態であることが分かる.

2.5 非ユニタリー過程と CPTP 写像

孤立量子系の時間発展は純粋状態は Schrödinger 方程式, 混合状態は von-Neumann 方程式に従うが, ここでは対象系が孤立系ではなく, 環境系と相互作用して時間発展する場合を考える. 全系の時間発展はユニタリー過程であるが, 部分系である対象系の時間発展のみに注目すると, 一般には非ユニタリー過程となる.

まず全系の初期状態が積状態

$$\hat{\rho}_{tot} = \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E \quad (2.5.20)$$

であるとする。 $\hat{\rho}_{tot}$, $\hat{\rho}_S$, $\hat{\rho}_E$ はそれぞれ全系, 対象系, 環境系の初期状態の密度演算子である。全系がユニタリー演算子 \hat{U} で時間発展し, 終状態が

$$\hat{\rho}'_{tot} = \hat{U} \hat{\rho}_{tot} \hat{U}^\dagger \quad (2.5.21)$$

となると, 対象系の終状態は

$$\hat{\rho}'_S = \text{Tr}_E[\hat{\rho}'_{tot}] \quad (2.5.22)$$

である。環境系の初期状態を $\hat{\rho}_E = \sum_l q_l |\Phi_l\rangle \langle \Phi_l|$ とスペクトル分解し, $\{|\Psi_m\rangle\}$ を環境系の正規直交基底だとすると,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_S &= \sum_m \langle \Psi_m | \hat{\rho}'_{tot} | \Psi_m \rangle \\ &= \sum_{lm} q_l \langle \Psi_m | \hat{U} (\hat{\rho}_S \otimes |\Phi_l\rangle \langle \Phi_l|) \hat{U}^\dagger | \Psi_m \rangle \\ &= \sum_{lm} q_l \langle \Psi_m | \hat{U} | \Phi_l \rangle \hat{\rho}_S \langle \Phi_l | \hat{U}^\dagger | \Psi_m \rangle \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

ここで

$$\hat{M}_{lm} \equiv \sqrt{q_l} \langle \Psi_m | \hat{U} | \Phi_l \rangle \quad (2.5.24)$$

という対象系にのみ作用する演算子を定義すれば, (2.5.23) は

$$\hat{\rho}'_S = \sum_{lm} \hat{M}_{lm} \hat{\rho}_S \hat{M}_{lm}^\dagger \quad (2.5.25)$$

と書ける。(2.5.25) を Kraus 表現といい, (2.5.24) で定義される演算子 \hat{M}_{lm} を Kraus 演算子という。Kraus 演算子は

$$\begin{aligned} \sum_{lm} \hat{M}_{lm}^\dagger \hat{M}_{lm} &= \sum_{lm} \sqrt{q_l} \langle \Phi_l | \hat{U}^\dagger | \Psi_m \rangle \sqrt{q_l} \langle \Psi_m | \hat{U} | \Phi_l \rangle \\ &= \sum_l q_l \langle \Phi_l | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \Phi_l \rangle = \sum_l q_l \langle \Phi_l | \hat{I}_{SE} | \Phi_l \rangle \\ &= \sum_l q_l \hat{I}_S = \hat{I}_S \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

という完全性条件を満たす。 \hat{I}_{SE} , \hat{I}_S はそれぞれ全系, 対象系の恒等演算子である。この完全性条件から (2.5.25) で記述される非ユニタリー過程は

$$\text{Tr}[\hat{\rho}'_S] = \text{Tr}[\sum_{lm} \hat{M}_{lm} \hat{\rho}_S \hat{M}_{lm}^\dagger] = \text{Tr}[\sum_{lm} \hat{M}_{lm}^\dagger \hat{M}_{lm} \hat{\rho}_S] = \text{Tr}[\hat{\rho}_S] \quad (2.5.27)$$

のようにトレースを保存することが分かる。また, 対象系の Hilbert 空間を \mathcal{H}_S , 別の任意の系の Hilbert 空間を \mathcal{H}_R としたとき, 合成系 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$ の任意の密度演算子 $\hat{\rho}_{ex}$ に対し,

$$\hat{\rho}'_{ex} \equiv \sum_{lm} (\hat{M}_{lm} \otimes \hat{I}_R) \hat{\rho}_{ex} (\hat{M}_{lm}^\dagger \otimes \hat{I}_R) \quad (2.5.28)$$

で定義される演算子 $\hat{\rho}'_{ex}$ も正值である。この性質を満たす演算子から演算への写像を完全正值写像といい、任意の系の部分系だけを (2.5.25) で時間発展させたとき、全系の正值性も保たれることを表している。

トレースを保存する演算子から演算子への完全正值写像を、CPTP (completely positive and trace preserving map) 写像といい、対象系の非ユニタリ過程を表す (2.5.25) は CPTP 写像である。逆に任意の CPTP 写像は適当な Kraus 演算子を用いて (2.5.25) の形で書けることが知られている。^{*1}

Kraus 演算子は環境系の基底 $\{|\Psi_m\rangle\}$ の取り方に依存するため、別の基底 $\{|\Psi'_m\rangle\}$ に取り替えた場合別の Kraus 演算子となる。すなわち、与えられた非ユニタリ過程に対しそれを表す Kraus 表現は環境の基底の任意性の分無限個存在し一意ではない。

2.6 量子測定

ここでは量子力学において重要な測定の理論についての概略を述べる。

2.6.1 射影測定

まず射影測定と呼ばれる測定について解説する。

測定する系の状態ベクトルが $|\psi\rangle$ のときに、物理量 $\hat{A} = \sum_k \alpha_k \hat{P}_k$ を測定することを考える。ここで \hat{P}_k は固有値 α_k に対応する射影演算子で、 $\hat{P}_k^2 = \hat{P}_k$, $\sum_k \hat{P}_k = \hat{I}$ を満たす。射影測定の結果は固有値のひとつ α_k になり、その確率は $p(k) = \langle \psi | \hat{P}_k | \psi \rangle$ である。そして測定直後の状態 $|\psi'_k\rangle$ は測定結果に対応する固有空間に射影された

$$|\psi'_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(k)}} \hat{P}_k |\psi\rangle \quad (2.6.29)$$

になるとする。これは射影公理と呼ばれる経験則である。

測定する系の状態が密度演算子 $\hat{\rho} = \sum_i q_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ ので与えられる場合、測定結果 α_k を得る確率は $p(k) = \text{Tr}[\hat{P}_k \hat{\rho}]$ で、測定後の状態 $\hat{\rho}'_k$ は射影公理 (2.6.29) より、 $\sum_i q_i \hat{P}_k |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \hat{P}_k$ を規格化した

$$\hat{\rho}'_k = \frac{\hat{P}_k \hat{\rho} \hat{P}_k}{p(k)} \quad (2.6.30)$$

で与えられる。

2.6.2 間接測定

次に射影測定とは違い測定後の状態が測定結果に対応する固有状態にならない、一般の量子測定を考える。ここでは間接測定と呼ばれる測定を用いる。これは測定をしたい対象系と別のプローブ

^{*1}証明は [32] 等を参照

系を相互作用させ、プローブ系に対し射影測定をするといった測定である。相互作用により対象系とプローブ系に相関が生じ、プローブ系を射影測定することでそれを通じて対象系の情報を読み取ることができる。間接測定は以下のように定式化される。

対象系，プローブ系，全系の初期状態はそれぞれ $|\psi\rangle, |\phi\rangle, |\psi\rangle|\phi\rangle$ であるとする。次に全系がユニタリ演算子 \hat{U} で時間発展し，その後プローブ系に対しプローブ系の正規直交基底 $\{|\Psi_k\rangle\}$ で射影測定を行う。(すなわち射影演算子が $\hat{P}_k = |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$ で与えられる射影測定を行う。)

このとき測定結果 k を得る確率 $p(k)$ は

$$p(k) = \langle\psi|\langle\phi|\hat{U}^\dagger(|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|)\hat{U}|\psi\rangle|\phi\rangle = |\langle\Psi_k|\hat{U}|\psi\rangle|\phi\rangle|^2 \quad (2.6.31)$$

で与えられ，測定後の状態は射影公理から

$$\frac{1}{\sqrt{p(k)}} |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\hat{U}|\psi\rangle|\phi\rangle \quad (2.6.32)$$

となる。ここで対象系にのみ作用する演算子

$$\hat{M}_k \equiv \langle\Psi_k|\hat{U}|\phi\rangle \quad (2.6.33)$$

を定義する。これは測定演算子と呼ばれる。測定後の対象系の状態は測定演算子を用いると

$$\frac{1}{\sqrt{p(k)}} = \hat{M}_k|\psi\rangle \quad (2.6.34)$$

と書け，測定結果 k を得る確率 (2.6.31) は

$$\hat{E}_k \equiv \hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k \quad (2.6.35)$$

という演算子を定義すると

$$p(k) = \langle\psi|\hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{E}_k|\psi\rangle \quad (2.6.36)$$

と書ける。演算子 (2.6.35) を POVM(Positive Operator-Valued Measure) と呼ぶ。測定演算子は

$$\begin{aligned} \sum_k \hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k &= \sum_k \langle\phi|\hat{U}^\dagger|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\hat{U}|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\phi\rangle \\ &= \langle\phi|\hat{I}_{SE}|\phi\rangle = \hat{I}_S \end{aligned} \quad (2.6.37)$$

という完全性条件を満たす。(\hat{I}_{SE}, \hat{I}_S はそれぞれ全系，対象系の恒等演算子である。) これは POVM を用いると

$$\sum_k \hat{E}_k = \hat{I}_S \quad (2.6.38)$$

であり，これから確率 $p(k)$ が

$$\sum_k p(k) = \sum_k \text{Tr}[\hat{E}_k\hat{\rho}] = 1 \quad (2.6.39)$$

を満たしていることも確かめられる。

以上から、間接測定では測定演算子 (2.6.33) が分かれば測定結果を得る確率と測定による対象系の状態変化を知ることができる。

さらに一般化した間接測定のモデルとして、以下のような設定を考える。

対象系、プローブ系、全系の初期状態をそれぞれ $\hat{\rho}_S$, $\hat{\rho}_P$, $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P$ とし、全系がユニタリ演算子 \hat{U} で時間発展するとする。その後全系の物理量 $\hat{B} = \sum_k b_k \hat{P}_k$ を射影測定する。 (b_k は固有値, \hat{P}_k は b_k 対応する固有空間への射影演算子である。) 先程との違いは射影測定を全系に対し行うところである。この設定の下で、測定結果 k を得る確率 $p(k)$ は

$$p(k) = \text{Tr}_{SP}[\hat{P}_k \hat{U} \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P \hat{U}^\dagger] \quad (2.6.40)$$

で、測定後の全系の状態は射影公理から

$$\frac{1}{p(k)} \hat{P}_k \hat{U} \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P \hat{U}^\dagger \hat{P}_k \quad (2.6.41)$$

となる。よって対象系の測定後の状態 $\hat{\rho}'_S$ は

$$\hat{\rho}'_{Sk} = \frac{1}{p(k)} \text{Tr}_P[\hat{P}_k \hat{U} \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P \hat{U}^\dagger \hat{P}_k] \quad (2.6.42)$$

となる。ここで $\hat{\rho}_P = \sum_l q_l |\Phi_l\rangle \langle \Phi_l|$ とスペクトル分解し、 $\{|\Psi_m\rangle\}$ をプローブ系の正規直交基底とする。このとき (2.6.42) は

$$\begin{aligned} \hat{\rho}'_{Sk} &= \frac{1}{p(k)} \sum_{lm} q_l \langle \Psi_m | \hat{P}_k \hat{U} \hat{\rho}_S \otimes |\Phi_l\rangle \langle \Phi_l| \hat{U}^\dagger \hat{P}_k | \Psi_m \rangle \\ &= \frac{1}{p(k)} \sum_{lm} q_l \langle \Psi_m | \hat{P}_k \hat{U} |\Phi_l\rangle \hat{\rho}_S \langle \Phi_l | \hat{U}^\dagger \hat{P}_k | \Psi_m \rangle \end{aligned} \quad (2.6.43)$$

となる。ここで対象系にのみ作用する測定演算子を

$$\hat{M}_{klm} \equiv \sqrt{q_l} \langle \Psi_m | \hat{P}_k \hat{U} |\Phi_l\rangle \quad (2.6.44)$$

として定義すると、(2.6.43) は

$$\hat{\rho}'_{Sk} = \frac{1}{p(k)} \sum_{lm} \hat{M}_{klm} \hat{\rho}_S \hat{M}_{klm}^\dagger \quad (2.6.45)$$

となり、これはこの間接測定の Kraus 表現になっている。さらに POVM $\{\hat{E}_k\}$ を

$$\hat{E}_k \equiv \sum_{lm} \hat{M}_{klm}^\dagger \hat{M}_{klm} \quad (2.6.46)$$

で定義すると、(2.6.40) は

$$\begin{aligned} p(k) &= \text{Tr}_{SP}[\hat{P}_k \hat{U} \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P \hat{U}^\dagger \hat{P}_k] = \text{Tr}_S[\text{Tr}_P[\sum_l q_l \hat{P}_k \hat{U} \hat{\rho}_S \otimes |\Phi_l\rangle \langle \Phi_l| \hat{U}^\dagger \hat{P}_k]] \\ &= \text{Tr}_S[\sum_{lm} \hat{M}_{klm} \hat{\rho}_S \hat{M}_{klm}^\dagger] = \text{Tr}_S[\sum_{lm} \hat{M}_{klm}^\dagger \hat{M}_{klm} \hat{\rho}_S] \\ &= \text{Tr}_S[\hat{E}_k \hat{\rho}_S] \end{aligned} \quad (2.6.47)$$

となる。測定演算子 (2.6.44) は

$$\begin{aligned}
\sum_{klm} \hat{M}_{klm}^\dagger \hat{M}_{klm} &= \sum_{klm} \sqrt{q_l} \langle \Phi_l | \hat{U}^\dagger \hat{P}_k | \Psi_m \rangle \sqrt{q_l} \langle \Psi_m | \hat{P}_k \hat{U} | \Phi_l \rangle \\
&= \sum_{kl} q_l \langle \Phi_l | \hat{U}^\dagger \hat{P}_k \hat{U} | \Phi_l \rangle = \sum_l q_l \langle \Phi_l | \hat{I}_{SP} | \Phi_l \rangle \\
&= \sum_l q_l \hat{I}_S = \hat{I}_S
\end{aligned} \tag{2.6.48}$$

となり完全性条件を満たす。POVM を用いて書くと

$$\sum_k \hat{E}_k = \hat{I}_S \tag{2.6.49}$$

である。なお写像

$$\hat{\rho}_S \mapsto \sum_{lm} \hat{M}_{klm} \hat{\rho}_S \hat{M}_{klm}^\dagger \tag{2.6.50}$$

は完全正値写像ではあるが、(2.6.50) の右辺のトレースは

$$\text{Tr}_S[\hat{M}_{klm} \hat{\rho}_S \hat{M}_{klm}^\dagger] = \text{Tr}_S[\sum_{lm} \hat{M}_{klm}^\dagger \hat{M}_{klm} \hat{\rho}_S] = p(k) \tag{2.6.51}$$

であるから一般に 1 より小さく左辺のトレース $\text{Tr}_S[\rho_S] = 1$ とは異なる。すなわちこの写像はトレースを保存しない。 $p(k) = 1$ の場合に限りトレースが保存され CPTP 写像となる。

2.7 LOCC

時空中で複数の量子系を考える。各量子系 A,B,... が因果的に結ばれない領域に局在している場合、合成系の Hilbert 空間に作用するような非局所的ユニタリ操作 $\hat{U}_{AB\dots}$ は一般的に不可能である。そこで量子系に対してできる操作を小さな空間領域内での局所的操作に限定し、空間的に離れた 2 点間に対しては古典的ビット列に変換できる情報のやり取りのみを行う古典通信 (例えば電話等) のみに限定する。ここで局所的操作にはユニタリ操作だけでなく一般の局所的 CPTP 写像も含む。このような局所的操作と古典通信を行う設定を LOCC(Local Operation and Classical Communication) と呼ぶ。

例として状態 $\hat{\rho}_{AB}$ にある合成系 AB を考え、アリスが量子系 A を、空間的に離れたボブが B を所有しているとする。アリスが量子系 A に対し測定演算子 \hat{M}_{kA} で与えられる局所的測定を行い、その測定結果 k を古典通信でボブに伝える。ボブはそれを受け取り k に依存した局所ユニタリ演算子 \hat{U}_{kB} を量子系 B に作用させる。この LOCC による状態 $\hat{\rho}_{AB}$ の変化は

$$\hat{\rho}_{AB} \mapsto \sum_k \hat{U}_{kB} \hat{M}_{kA} \hat{\rho}_{AB} \hat{M}_{kA}^\dagger \hat{U}_{kB}^\dagger \tag{2.7.52}$$

という CPTP 写像で表される。ここで局所性は $[\hat{M}_{kA}, \hat{U}_{kB}] = [\hat{M}_{kA}^\dagger, \hat{U}_{kB}^\dagger] = 0$ で表現され、古典通信の効果は同じ測定結果 k に対応する演算子の積 $\hat{U}_{kB} \hat{M}_{kA}$ のみが和に含まれているところに現れている。

2.8 量子エンタングルメントエントロピー

合成系 AB の純粋状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ に対して部分系 A と B がどれほどエンタングルしているかを図る指標として、次のように定義される量子エンタングルメントエントロピー $S(|\Psi\rangle_{AB})$ がある。

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) = -\text{Tr}_A[\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A] \quad (2.8.53)$$

これは von-Neumann エントロピー (2.1.5) を用いると $S(\hat{\rho}_A)$ と書ける。また, Schmidt 分解 (2.2.10) から,

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) = -\sum_i p_i \ln p_i \quad (2.8.54)$$

とも書ける。この式で p_i しか現れていないことからわかるように量子エンタングルメントエントロピーは A,B の入れ替えで対称で

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) = -\text{Tr}_B[\hat{\rho}_B \ln \hat{\rho}_B] \quad (2.8.55)$$

でもある。量子エンタングルメントエントロピーは以下のような性質をもつ。

(S1) 局所ユニタリー演算子 $\hat{U}_A \hat{U}'_B$ に対し不変である：

$$S(\hat{U}_A \hat{U}'_B |\Psi\rangle_{AB}) = S(|\Psi\rangle_{AB}) \quad (2.8.56)$$

(S2) 積状態 $|\psi\rangle_A |\phi\rangle_B$ に対し,

$$S(|\psi\rangle_A |\phi\rangle_B) = 0 \quad (2.8.57)$$

(S3) A(または B) の一般測定後に確率 $p(k)$ で測定結果 k が観測され, 測定後の状態が $|\Psi(k)\rangle_{AB}$ になったとき,

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) \geq \sum_{\mu} p(k) S(|\Psi(k)\rangle_{AB}) \quad (2.8.58)$$

(S4) 状態 $|\Psi^{(k)}\rangle$ にある合成系 $A_k B_k$ を複数個用意したとき,

$$S\left(\bigotimes_k |\Psi^{(k)}\rangle_{A_k B_k}\right) = \sum_k S\left(|\Psi^{(k)}\rangle_{A_k B_k}\right) \quad (2.8.59)$$

という相加性を満たす。

性質 (S1) は, トレースの巡回性と $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I}$ より, 性質 (2) は積状態では $p_i = 1$ であることからわかる。性質 (S3) は単調性 (monotonicity) と呼ばれる。性質 (S3) からはさらに以下の性質 (S3') も導かれる。

(S3') LOCC を状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ $\langle\Psi|_{AB}$ に作用させて純粋状態 $|\Phi\rangle_{AB}$ $\langle\Phi|_{AB}$ になった時,

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) \geq S(|\Phi\rangle_{AB}) \quad (2.8.60)$$

が成り立つ。^{*2}

^{*2}(S3), (S3') の証明は付録 A, 付録 B に与えた

(S1)~(S3) を満たす純粋状態の量子エンタングルメントの度合いを測る測度は量子エンタングルメントエントロピー以外にも存在する。

量子状態 $\hat{\rho}$ を実数へ写像する関数 F で、次の性質を満たすものを考える。

(F1) ユニタリ演算子で不変

$$F[\hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger] = F[\hat{\rho}] \quad (2.8.61)$$

(F2) $0 \leq p \leq 1$ を満たす p に対し凹性

$$F[p\hat{\rho}_1 + (1-p)\hat{\rho}_2] \geq pF[\hat{\rho}_1] + (1-p)F[\hat{\rho}_2] \quad (2.8.62)$$

を満たす。

このような関数 F を行列凹関数という。性質 (F1) からは任意の純粋状態に対し F の値は不変であるからこれを F_0 とおく。このとき

$$S_F(|\Psi\rangle_{AB}) \equiv F\left[\mathrm{Tr}_B[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}]\right] - F_0 \quad (2.8.63)$$

を定義する。 S_F はトレースの巡回性および性質 (F1) より (S1) を満たす。また、 F_0 を引いているので (S2) も満たされる。さらに性質 (F2) より量子エンタングルメントエントロピーの場合と同様にして (S3),(S3') も満たすことが分かる。

量子エンタングルメントエントロピーは $F[\hat{\rho}] = -\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\ln\hat{\rho}]$ とした場合にあたる。

よく用いられるものとしては、 F として

$$F_\alpha[\hat{\rho}] = \frac{1}{1-\alpha} \ln(\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^\alpha]) \quad (0 < \alpha < 1) \quad (2.8.64)$$

を用いた量子 Renyi エントロピー

$$S_\alpha(|\Psi\rangle_{AB}) = \frac{1}{1-\alpha} \ln\left(\mathrm{Tr}\left[\left(\mathrm{Tr}_B[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}]\right)^\alpha\right]\right) \quad (2.8.65)$$

がある。 $\alpha \rightarrow 1$ の極限が量子エンタングルメントエントロピーである。

一般に AB 間の量子エンタングルメントが大きくなると、合成系 AB は純粋状態に近づき、任意の他の系 C とは相関を持たなくなる。すなわち AB が強くエンタングルすれば、 AC または BC の間の量子エンタングルメントは小さくなる。

この量子エンタングルメントの性質はモノガミー性と呼ばれる。このことは量子エンタングルメントエントロピーの言葉で以下のように定量化できる。

合成系 ABC の量子状態 $\hat{\rho}_{ABC}$ に対し、部分系の縮約状態を $\hat{\rho}_{AB} = \mathrm{Tr}_C[\hat{\rho}_{ABC}]$, $\hat{\rho}_{BC} = \mathrm{Tr}_A[\hat{\rho}_{ABC}]$, $\hat{\rho}_B = \mathrm{Tr}_{AC}[\hat{\rho}_{ABC}]$ と定義すると、von-Neumann エントロピー $S = -\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\ln\hat{\rho}]$ に対し、

$$S_{AB} + S_{BC} \geq S_B + S_{ABC} \quad (2.8.66)$$

が成り立つことが知られている [13]. この不等式は強劣加法性と言われる. 合成系 BC が純粋状態 $\hat{\rho}_{BC} = |\Psi\rangle_{BC}\langle\Psi|_{BC}$ のとき, $S_{BC} = 0$, $S_{ABC} = S_A$ であるから

$$S_A + S_B - S_{AB} \leq 0 \quad (2.8.67)$$

となる. 左辺の量は AB 間の量子相互情報量 $I(A||B) = S_A + S_B - S_{AB}$ と呼ばれ, 非負の量である [7]. したがって $I(A||B) = 0$ となり, AB 間に相関がないことを意味する.

2.9 Page の定理

合成系 AB $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ($|A| \equiv \dim\mathcal{H}_A \leq |B| \equiv \dim\mathcal{H}_B$) を考えたときに AB 間の量子エンタングルメントについて成り立つ Page の定理がある. この定理は後にブラックホールの Hawking 輻射の量子エンタングルメントを議論する際に重要となる.

定理 1 (Page[3]) 任意の合成系 AB $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ に対し,

$$\int dU \left\| \hat{\rho}_A(U) - \frac{\hat{I}_A}{|A|} \right\|_1 \leq \sqrt{\frac{|A|^2 - 1}{|A||B| + 1}} \quad (2.9.68)$$

この定理を Page の定理という. 以下ではこの定理について詳しく見ていく.

$\hat{\rho}_A(U)$ は, 任意の純粋状態 $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$ に対し, Haar 測度からランダムに選んだ U を作用させた $|\psi(U)\rangle \equiv U|\psi_0\rangle$ の縮約状態, $\text{Tr}_B[|\psi(U)\rangle\langle\psi(U)|]$ である. また, 状態の近さを表すノルムとして, 次の L_1 ノルムを定義する:

演算子 \hat{M} に対し

$$\|\hat{M}\|_1 \equiv \text{Tr} \left[\sqrt{\hat{M}^\dagger \hat{M}} \right] \quad (2.9.69)$$

この L_1 ノルムを用いて密度演算子が $\hat{\rho}$ と $\hat{\sigma}$ で表される 2 状態の “近さ” は $\|\hat{\rho} - \hat{\sigma}\|_1$ で測られる. さらに次の L_2 ノルム

$$\|\hat{M}\|_2 \equiv \sqrt{\text{Tr}[\hat{M}^\dagger \hat{M}]} \quad (2.9.70)$$

を定義しておく, 次の不等式が成り立つ

$$\|M\|_2 \leq \|M\|_1 \leq \sqrt{N} \|M\|_2 \quad (2.9.71)$$

ここで N は Hilbert 空間の次元である.

Page の定理は, $\frac{|A|}{|B|} \ll 1$ のとき, 典型的な A の縮約状態はほぼ最大混合状態にある, すなわち, B 系の次元が A 系の次元より十分大きいとき, \mathcal{H}_{AB} の典型的な純粋状態は最大エンタングル状態にあるということを主張している.

証明は以下のようにできる.

(証明)

まず

$$\begin{aligned} \left(\int dU \left\| \hat{\rho}_A(U) - \frac{\hat{I}_A}{|A|} \right\|_1 \right)^2 &\leq \int dU \left(\left\| \hat{\rho}_A(U) - \frac{\hat{I}_A}{|A|} \right\|_1 \right)^2 \\ &\leq |A| \int dU \left(\left\| \hat{\rho}_A(U) - \frac{\hat{I}_A}{|A|} \right\|_2 \right)^2 \end{aligned} \quad (2.9.72)$$

が成り立つ。ここで最初の不等式は、実数上の凸関数 $f(x)$ と、 $p(x) > 0$, $\int p(x)dx = 1$ を満たす実関数 $p(x)$ に対して成り立つ Jensen の不等式

$$\int f(y(x))p(x)dx \geq f\left(\int y(x)p(x)dx\right) \quad (2.9.73)$$

を $f(x) = x^2$, $p(U) = 1$ (Haar 測度の性質から $\int dU = 1$), $y(U) = \left\| \hat{\rho}_A(U) - \frac{\hat{I}_A}{|A|} \right\|_1$ として適応し、2番目の不等式では (2.9.71) を使った。さらに (C.1) を (2.9.72) の右辺に用いると、

$$\begin{aligned} |A| \int dU \left(\left\| \hat{\rho}_A(U) - \frac{\hat{I}_A}{|A|} \right\|_2 \right)^2 &= |A| \int dU \left(\text{Tr}[\hat{\rho}_A^2] - \frac{1}{|A|} \right) \\ &= |A| \left(\frac{|A| + |B|}{|A||B| + 1} - \frac{1}{|A|} \right) \\ &= \frac{|A|^2 - 1}{|A||B| + 1} \end{aligned} \quad (2.9.74)$$

となり (2.9.68) が示される。□

ここでは Page の定理を量子エンタングルメントエントロピー $S_A \equiv -\text{Tr}[\hat{\rho}_A(U) \ln \hat{\rho}_A(U)]$ の言葉で書き換える。

$$\Delta \hat{\rho}_A \equiv \hat{\rho}_A(U) - \frac{\hat{I}_A}{|A|} \quad (2.9.75)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} \int dU S_A &= - \int dU \text{Tr}[\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A] \\ &= \int dU \text{Tr} \left[\left(\frac{\hat{I}_A}{|A|} + \Delta \hat{\rho}_A \right) \left(\ln |A| - |A| \Delta \hat{\rho}_A + \frac{1}{2} |A|^2 \hat{\rho}_A^2 \right) + \dots \right] \\ &= \int dU \left(\ln |A| - \frac{1}{2} |A| \text{Tr}[\Delta \hat{\rho}_A^2] + \dots \right) \\ &= \ln |A| - \frac{1}{2} \frac{|A|^2 - 1}{|A||B| + 1} \end{aligned} \quad (2.9.76)$$

となり、 $\frac{|A|}{|B|} \ll 1$ のとき、

$$S_A \sim \ln |A| \quad (2.9.77)$$

の最大エンタングル状態に近似するということがわかる。

2.10 Gauss 状態における量子情報

Gauss 状態は系のハミルトニアンが正準演算子の双 2 次形式で書かれる状態である。第 6 章の議論で必要となるためにここで Gauss 状態の量子情報の側面について述べる。

2.10.1 N 調和振動子系

N-調和振動子系を考え、各調和振動子の正準変数 (\hat{q}_n, \hat{p}_n) を纏めてベクトル表記で

$$\hat{\mathbf{r}} = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_2, \dots, \hat{q}_N, \hat{p}_N)^T \quad (2.10.78)$$

と表すことにする。このとき正準交換関係は

$$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}^T] = i\Omega \quad (2.10.79)$$

と書ける。ここでベクトル演算子 $\hat{\mathbf{a}}$ に対し $[\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}^T] \equiv \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^T - (\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}^T)^T$, Ω は

$$\Omega = \bigoplus_{j=1}^N \Omega_1, \quad \Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10.80)$$

で定義される $2N \times 2N$ 行列である。

Gauss 状態 $\hat{\rho}$ は $\hat{\mathbf{r}}$ の 1 次と 2 次のモーメントによって一意に特徴づけられる状態である。1 次のモーメントである正準演算子の期待値 $\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\mathbf{r}}]$ は、次の Weyl 演算子

$$\hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}} \equiv e^{i\bar{\mathbf{r}}^T \Omega \hat{\mathbf{r}}} \quad (\hat{D}_{-\bar{\mathbf{r}}} = \hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}}^\dagger) \quad (2.10.81)$$

が、

$$\begin{aligned} e^{-i\sum_{lm} \bar{r}_l \Omega_{lm} \hat{r}_m} \hat{\rho}_s e^{i\sum_{lm} \bar{r}_l \Omega_{lm} \hat{r}_m} &= \hat{r}_s - i \sum_{lm} \bar{r}_l \Omega_{lm} [\hat{r}_m, \hat{r}_s] \\ &= \hat{r}_s + \sum_{lm} \bar{r}_l \Omega_{lm} \Omega_{ms} \\ &= \hat{r}_s - \sum_l \bar{r}_l \delta_{ls} \\ &= \hat{r}_s - \bar{r}_s \end{aligned} \quad (2.10.82)$$

より*3正準変数に対し

$$\hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}}^\dagger \hat{\mathbf{r}} \hat{D}_{\bar{\mathbf{r}}} = \hat{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}} \quad (2.10.83)$$

と作用するので、局所ユニタリ変換として $\bar{\mathbf{r}} = \langle \hat{\mathbf{r}} \rangle$ の Weyl 演算子を状態に作用させておくことで

$$\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle = 0 \quad (2.10.84)$$

*3一つ目の等式は Baker-Campbell-Hausdorff の公式 $e^{\hat{X}} \hat{Y} e^{-\hat{X}} = \hat{Y} + [\hat{X}, \hat{Y}] + \frac{1}{2!} [\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]] + \dots$ を使った。

とできる。局所ユニタリ変換は量子エンタングルメントに影響しないため、以後この Gauss 状態に限って議論する。このとき状態は次の共分散行列とよばれる $2N \times 2N$ の実対称行列

$$\begin{aligned} m &\equiv \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \hat{\rho} \{ \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}^T \} \right] \\ &= \text{Re} \langle \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}^T \rangle \end{aligned} \quad (2.10.85)$$

で特徴づけられる。ここでベクトル演算子に対し $\{ \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}^T \} = \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^T + (\hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^T)^T$ である。この共分散行列を用いると特性関数 $\chi(\boldsymbol{\xi})$ は

$$\chi(\boldsymbol{\xi}) \propto \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{2N} \xi_\alpha m_{\alpha\beta} \xi_\beta \right) \quad (2.10.86)$$

と書ける。 $\boldsymbol{\xi}$ は $2N$ 次元実数ベクトル $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2N})^T$ である。また密度演算子の正定値性から

$$\boldsymbol{\xi}^T m \boldsymbol{\xi} = \text{Tr} \left[(\boldsymbol{\xi}^T \hat{\mathbf{r}})^2 \hat{\rho} \right] \geq 0 \quad (2.10.87)$$

が任意の実ベクトルに対して成り立つので、共分散行列 m は正定値行列 ($m \geq 0$) である。正準交換関係 (2.10.79) と (2.10.84) を保存する正準変数の線形変換は実シンプレクティック群 $Sp(2N, R)$ を成し

$$\hat{\mathbf{r}}' = S \hat{\mathbf{r}} \quad (S \in Sp(2N, R)) \quad (2.10.88)$$

$$S \Omega S^T = \Omega \quad (2.10.89)$$

という $2N \times 2N$ 実行列 S で表現される。共分散行列は

$$M = S m S^T \quad (2.10.90)$$

と変換される。一般に、次の定理が成り立つ。

定理 2 (Williamson[8]) $m \geq 0$ を満たす $2N \times 2N$ 実対称行列 m に対し、ある $S \in Sp(2N, R)$ で

$$M = S m S^T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_N) \quad (\lambda_i \text{ は非負の実数}) \quad (2.10.91)$$

と対角化するものが存在する。

λ_i をここではこのシンプレクティック変換の固有値と呼ぶことにする。

$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}^T] + \{ \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}^T \} = 2\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}^T$ と (2.10.79), および密度演算子の非負性より

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Tr} [\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}^T \hat{\rho}] \\ &= \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (\{ \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}^T \} + [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}^T]) \hat{\rho} \right] \\ &= m + \frac{i}{2} \Omega \end{aligned} \quad (2.10.92)$$

が成り立つ。これは不確定性原理の別の表現となっている。この関係式はシンプレクティック変換を施しても成り立つため、

$$M + \frac{i}{2}\Omega = \bigoplus_i^N \begin{pmatrix} \lambda_i & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \lambda_i \end{pmatrix} \geq 0 \quad (2.10.93)$$

すなわち $M + \frac{i}{2}\Omega$ の固有値 $\lambda_i \pm \frac{1}{2}$ が非負であるという式になり、シンプレクティック変換の固有値 λ_i に対して

$$\forall i \quad \lambda_i \geq \frac{1}{2} \quad (2.10.94)$$

と同値である。共分散行列を対角化するシンプレクティック変換によって変換された正準変数を (\hat{Q}_i, \hat{P}_i) とし、生成消滅演算子を

$$\hat{a}_j \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}_j + i\hat{P}_j) \quad (2.10.95)$$

で定義する。この正準座標系では

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \langle Q_j^2 \rangle = \langle P_j^2 \rangle = \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{e^{\beta_j} - 1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \coth \left(\frac{\beta_j}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.10.96)$$

である。

このとき状態 $\hat{\rho}$ は

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \bigotimes_j^N [1 - e^{-\beta_j}] e^{-\beta_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j} \\ &= \bigotimes_{j=1}^N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j + \frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda_j - \frac{1}{2}}{\lambda_j + \frac{1}{2}} \right)^n |n\rangle_j \langle n|_j \right) \end{aligned} \quad (2.10.97)$$

で書かれる。ピュリティ $\mu(\hat{\rho})$ は

$$\mu(\hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \prod_{j=1}^N \left[\left(\frac{1}{\lambda_j + \frac{1}{2}} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_j - \frac{1}{2}}{\lambda_j + \frac{1}{2}} \right)^{2n} \right] = \frac{1}{2^N} \prod_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \quad (2.10.98)$$

であるが、 $\det S = 1$ より $\prod_{j=1}^N \lambda_j^2 = \det m$ なので

$$\mu(\hat{\rho}) = \frac{1}{2^N \sqrt{\det m}} \quad (2.10.99)$$

となる。系が純粋状態となる条件は $\mu(\hat{\rho}) = 1$ 、すなわち $\det m = (\frac{1}{2})^{2N}$ であるがこれは $\lambda_i = \frac{1}{2} (\forall i)$ のときで、 $m = \frac{1}{2} S S^T$ となる $S \in Sp(2N, R)$ が存在することと同値である。これより系が純粋状態である条件は

$$m \Omega m = \frac{1}{4} S S^T \Omega S S^T = \frac{1}{4} S \Omega S^T = \frac{1}{4} \Omega \quad (2.10.100)$$

となる.

von-Neumann エントロピーは

$$\begin{aligned}
S(\hat{\rho}) &= -\text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}] = \sum_{j=1}^N \left[\ln \left(\lambda_j + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\lambda_j + \frac{1}{2}} \ln \left(\frac{\lambda_j - \frac{1}{2}}{\lambda_j + \frac{1}{2}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda_j - \frac{1}{2}}{\lambda_j + \frac{1}{2}} \right)^n \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \left[\ln \left(\lambda_j + \frac{1}{2} \right) - \left(\lambda_j - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{\lambda_j - \frac{1}{2}}{\lambda_j + \frac{1}{2}} \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^N \left[\left(\lambda_j + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\lambda_j + \frac{1}{2} \right) - \left(\lambda_j - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\lambda_j - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.10.101)
\end{aligned}$$

と計算できる. さらに一般に $\alpha > 1$ に対し

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\hat{\rho}^\alpha) &= \prod_{j=1}^N \left[\frac{1}{(\lambda_j + \frac{1}{2})^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_j - \frac{1}{2}}{\lambda_j + \frac{1}{2}} \right)^{\alpha n} \right] \\
&= \prod_{j=1}^N \frac{1}{(\lambda_j + \frac{1}{2})^\alpha - (\lambda_j - \frac{1}{2})^\alpha} \quad (2.10.102)
\end{aligned}$$

なので, Renyi エントロピー $S_\alpha(\hat{\rho})$ は

$$S_\alpha(\hat{\rho}) = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{1-\alpha} \ln \left(\frac{1}{(\lambda_j + \frac{1}{2})^\alpha - (\lambda_j - \frac{1}{2})^\alpha} \right) \right] \quad (2.10.103)$$

となる.

2.10.2 2モードシンプレクティック変換

ここでは後で利用するために, N 調和振動子系のうち, 2モードをシンプレクティック変換することを考える.

2つのモードを A, B とし, その共分散行列

$$m_{AB} = \begin{pmatrix} \langle \hat{q}_A^2 \rangle & \frac{1}{2} \langle \hat{q}_A \hat{p}_A + \hat{p}_A \hat{q}_A \rangle & \langle \hat{q}_A \hat{q}_B \rangle & \langle \hat{q}_A \hat{p}_B \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \hat{p}_A \hat{q}_A \rangle & \langle \hat{p}_A^2 \rangle & \langle \hat{p}_A \hat{q}_B \rangle & \langle \hat{p}_A \hat{p}_B \rangle \\ \langle \hat{q}_B \hat{q}_A \rangle & \langle \hat{q}_B \hat{p}_A \rangle & \langle \hat{q}_B^2 \rangle & \frac{1}{2} \langle \hat{q}_B \hat{p}_B + \hat{p}_B \hat{q}_B \rangle \\ \langle \hat{p}_B \hat{q}_A \rangle & \langle \hat{p}_B \hat{p}_A \rangle & \frac{1}{2} \langle \hat{p}_B \hat{q}_B + \hat{q}_B \hat{p}_B \rangle & \langle \hat{q}_B^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (2.10.104)$$

をシンプレクティック変換する.

(2.10.91) の対角化は局所的なシンプレクティック変換, すなわち AB 系にのみ作用するシンプレクティック変換

$$S_{local} \equiv \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_{2(N-2)} \end{pmatrix} \quad (2.10.105)$$

(S_1, S_2 は 2×2 のシンプレクティック行列, $\mathbb{I}_{2(N-2)}$ は $2(N-2) \times 2(N-2)$ の単位行列である.)
 だけでは達成できず, S_{local} で可能なのは次の形

$$M_{sf} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} m_{AB} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & 0 & c_+ & 0 \\ 0 & a & 0 & c_- \\ c_+ & 0 & b & 0 \\ 0 & c_- & 0 & b \end{pmatrix} \quad (2.10.106)$$

までであることが知られている [33],[34]. この M_{sf} を共分散行列の標準形と呼ぶ. M_{sf} の非負性から

$$a \geq 0, b \geq 0, ab \geq c_{\pm}^2 \quad (2.10.107)$$

が成り立っており, M_{sf} の固有値は

$$\frac{1}{2} \left(a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c_+^2} \right), \frac{1}{2} \left(a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c_-^2} \right) \quad (2.10.108)$$

の4つである.

このとき系が純粋状態である条件 (2.10.100) は

$$a = b \quad (2.10.109)$$

$$c_+ = -c_- \quad (2.10.110)$$

$$c_+ c_- = \frac{1}{4} - a^2 \quad (2.10.111)$$

と書けるが, シンプレクティック変換の固有値は $\frac{1}{2}$ 以上であるから, これはさらに正の実数 g を用いて

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{1+g^2} & 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{1+g^2} & 0 & -\frac{g}{2} \\ \frac{g}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{1+g^2} & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{1+g^2} \end{pmatrix} \quad (2.10.112)$$

という条件となる. またこのとき AB 間の量子エンタングルメントエントロピーはこの g を用いて (2.10.101) を表して

$$S(g) = \sqrt{1+g^2} \ln \left(\frac{1}{g} (\sqrt{1+g^2} + 1) \right) + \ln \left(\frac{g}{2} \right) \quad (2.10.113)$$

となる. $\lim_{g \rightarrow 0} S(g) = 0$, $\lim_{g \rightarrow \infty} S(g) = \infty$ であり, $g = 0$ は A, B それぞれ単独で純粋状態となっている場合である.

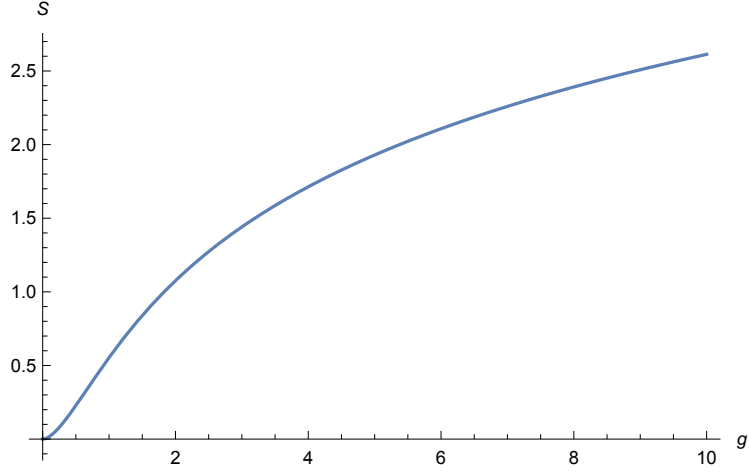


図1 2モード間の量子エンタングルメントエントロピー $S(g)$

3 Unruh 効果

この章では、慣性運動している測定者にとっての真空状態を一様加速度運動している測定者が観測すると、温度一定の熱浴を観測するという Unruh 効果について、量子情報の側面から解説する。

3.1 自由スカラー場の量子化

初めに一般的の時空上でのスカラー場の量子化について説明する。大域的双曲な時空 (M, g) を次のように $(3+1)$ 分解する

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \quad (3.1.1)$$

Σ_t を $t = \text{一定}$ の Cauchy 面とすると、 $n_a \equiv -N(dt)_a$ は Σ_t に直交する未来向き単位ベクトルである。 h_{ij} は Σ_t 上の誘導計量で、 $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$ である。

この時空上で作用が

$$S = \int_M dt d^3x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right) \quad (3.1.2)$$

の実自由スカラー場 $\Phi(x)$ を考える。

運動方程式は次の Klein-Gordon 方程式

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi(x) - m^2 \Phi(x) = 0 \quad (3.1.3)$$

である。 $\Phi(x)$ の共役運動量 $\Pi(x)$ は

$$\Pi(x) = \frac{\delta S}{\delta(\partial_t \Phi(x))} = -\sqrt{-g} g^{t\mu} \partial_\mu \Phi(x) = -N\sqrt{h} (dt)_\nu g^{\nu\mu} \partial_\mu \Phi(x) = \sqrt{h} n^\mu \partial_\mu \Phi(x) \quad (3.1.4)$$

で定義する.

ここで量子化のために $\Phi(x)$, $\Pi(x)$ を演算子 $\hat{\Phi}(x)$, $\hat{\Pi}(x)$ とし, 同時刻正準交換関係

$$[\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\Pi}(t, \mathbf{x}')] = i\delta^{(3)}(x - x') \quad [\hat{\Phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\Phi}(t, \mathbf{x}')] = 0 \quad [\hat{\Pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\Pi}(t, \mathbf{x}')] = 0 \quad (3.1.5)$$

を課す. Klein-Gordon 方程式 (3.1.3) の解空間を \mathcal{S} で表すことにし, $f, g \in \mathcal{S}$ に対し次の Klein-Gordon 内積 (以下 KG 内積) を定義する.

$$\langle f, g \rangle_{|\Sigma} \equiv i \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} n^{\mu} (f^*(x) \partial_{\mu} g(x) - g(x) \partial_{\mu} f^*(x)) \quad (3.1.6)$$

ここで積分範囲 Σ は任意の Cahuchy 面であり, KG 内積が Σ の取り方によらないことは次のようにしてわかる.

カレント $j_{\mu} \equiv i(f^*(x) \partial_{\mu} g(x) - g(x) \partial_{\mu} f^*(x))$ は (3.1.3) より

$$\nabla_{\mu} j^{\mu} = i(f^* \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} g(x) - g(x) \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} f(x)) = im^2(f^*(x)g(x) - g(x)f^*(x)) = 0 \quad (3.1.7)$$

を満たす. これを 2 つの Chauchy 面 Σ, Σ' に囲まれた領域 V で積分すると, Stokes の定理から

$$0 = \int_V dV \nabla_{\mu} j^{\mu} = \int_{\partial V} d^3x \sqrt{h} n_{\mu} j^{\mu} = \langle f, g \rangle_{|\Sigma} - \langle f, g \rangle_{|\Sigma'} \quad (3.1.8)$$

となり, KG 内積が Σ の取り方によらないことが分かる.

KG 内積は次の性質を満たす.

$$\langle g, f \rangle = \langle f, g \rangle^* \quad (3.1.9)$$

$$\langle f^*, g^* \rangle = -\langle g, f \rangle = -\langle f, g \rangle^* \quad (3.1.10)$$

KG 内積は一般に正定値性を持たない. よって解空間 \mathcal{S} は KG 内積が正值を持つ解空間 \mathcal{S}_p と負値を持つ解空間 $\bar{\mathcal{S}}_p$ で

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_p \oplus \bar{\mathcal{S}}_p \quad (3.1.11)$$

と分解される. この分解の仕方は一意ではないことに注意が必要である. KG 内積に対し,

$$\langle f_I, f_J \rangle = \delta_{IJ}, \quad \langle f_I, f_J^* \rangle = 0, \quad (3.1.12)$$

$$\langle f_I^*, f_J \rangle = 0, \quad \langle f_I^*, f_J^* \rangle = -\delta_{IJ} \quad (3.1.13)$$

を満たす関数の極大集合 $\{f_I \in \mathcal{S}_p\}$ を正エネルギー解の完全系と呼ぶ. この正エネルギー解の完全系 $f_I \in \mathcal{S}_p$ に対し生成消滅演算子を次のように定義する.

$$\hat{a}_I \equiv \langle f_I, \hat{\Phi} \rangle, \quad \hat{a}_I^{\dagger} \equiv -\langle f_I^*, \hat{\Phi} \rangle \quad (3.1.14)$$

これらを用いてスカラー場は

$$\hat{\Phi}(x) = \sum_I [\hat{a}_I f_I(x) + \hat{a}_I^{\dagger} f_I^*(x)] \quad (3.1.15)$$

$$[\hat{a}_I, \hat{a}_J^{\dagger}] = \langle f_I, f_J \rangle = \delta_{IJ}, \quad [\hat{a}_I, \hat{a}_J] = [\hat{a}_I^{\dagger}, \hat{a}_J^{\dagger}] = 0 \quad (3.1.16)$$

と量子化される．真空 $|0\rangle$ は

$$\forall I \quad \hat{a}_I |0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (3.1.17)$$

として定義する．真空は生成消滅演算子の定義に依るため，正エネルギー解の完全系の取り方によって変わる．一般の曲がった空間では正エネルギー解の完全系取り方は自明ではないが，時空が大域的な時間的 Killing ベクトル ξ を持つ場合は，その固有値が負虚数値

$$\mathcal{L}_\xi f = -i\omega f \quad \omega > 0 \quad (3.1.18)$$

となる固有関数 f で指定でき， \mathcal{S}_p はこの f で張られる．(\mathcal{L}_ξ は ξ に関する Lie 微分である)

例えば Minkowski 時空における大域的な時間的 Killing ベクトルは ∂_t である．

3.2 Bogoliubov 変換

正エネルギー解の完全系 $\{f_I\}$ で張られる \mathcal{S}_p と，別の正エネルギー解の完全系 $\{g_I\}$ で張られる \mathcal{S}'_p は

$$g_I = \sum_J (\alpha_{IJ} f_J + \beta_{IJ} f_J^*), \quad g_I^* = \sum_J (\beta_{IJ}^* f_J + \alpha_{IJ}^* f_J^*) \quad (3.2.19)$$

という変換でつながる．ここで係数 α_{IJ} , β_{IJ} は

$$\sum_K (\alpha_{IK} \alpha_{KJ}^* - \beta_{IK} \beta_{KJ}^*) = \delta_{IJ}, \quad \sum_K (\alpha_{IK} \beta_{KJ} - \beta_{IK} \alpha_{KJ}) = 0 \quad (3.2.20)$$

$$\sum_K (\alpha_{IK}^* \alpha_{KJ} - \beta_{IK}^* \beta_{KJ}^*) = \delta_{IJ}, \quad \sum_K (\alpha_{IK}^* \beta_{KJ} - \beta_{IK} \alpha_{KJ}^*) = 0 \quad (3.2.21)$$

を満たす．行列表記 $\alpha \equiv (\alpha_{IJ})$, $\beta \equiv (\beta_{IJ})$ では

$$\alpha \alpha^\dagger - \beta \beta^\dagger = \mathbf{1}, \quad \alpha \beta^T - \beta \alpha^T = 0 \quad (3.2.22)$$

$$\alpha^\dagger \alpha - \beta^\dagger \beta^* = \mathbf{1}, \quad \alpha^\dagger \beta - \beta^\dagger \alpha^* = 0 \quad (3.2.23)$$

この係数 α , β を Bogoliubov 係数といい，変換 (3.2.19) を Bogoliubov 変換という．Bogoliubov 係数は KG 内積を用いて

$$\alpha_{IJ} = \langle g_I, f_J \rangle, \quad \beta_{IJ} = -\langle g_I, f_J^* \rangle \quad (3.2.24)$$

$$\alpha_{IJ}^* = -\langle g_I^*, f_J^* \rangle, \quad \beta_{IJ}^* = \langle g_I^*, f_J^* \rangle \quad (3.2.25)$$

と求められる．また， $\{g_I\}$ から定義される生成消滅演算子 \hat{b}_I , \hat{b}_I^\dagger は

$$\hat{b}_I = \sum_J (\alpha_{IJ}^* \hat{a}_J - \beta_{IJ}^* \hat{a}_J^\dagger), \quad \hat{b}_I^\dagger = \sum_J (-\beta_{IJ} \hat{a}_J + \alpha_{IJ} \hat{a}_J^\dagger) \quad (3.2.26)$$

と書ける．新しい真空は $\hat{b}_I |0'\rangle = 0$ ($\forall I$) で定義されるが， $\beta = 0$ の場合は \hat{b}_I が \hat{a}_I の線形結合で書けるので $|0'\rangle \propto |0\rangle$ となり真空は変更を受けない．真空を変えるのは $\beta \neq 0$ の Bogoliubov 変換

である.

$\beta \neq 0$ の Bogoliubov 変換を受けたモード I の個数演算子 $\hat{N}_I \equiv \hat{b}_I \hat{b}_I$ の元の真空 $|0\rangle$ での期待値は

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{N}_I | 0 \rangle &= \langle 0 | \sum_K (-\beta_{IK} \hat{a}_K + \alpha_{IK} \hat{a}_K^\dagger) \sum_L (\alpha_{IL}^* \hat{a}_L - \beta_{IL}^* \hat{a}_L^\dagger) | 0 \rangle \\ &= \sum_K |\beta_{IK}|^2 \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

となり, 粒子生成が観測される. このように真空の正エネルギー完全解の取り方による不定性のために起こる粒子生成がこれから見ていく Unruh 効果や Hawking 輻射を引き起こす.

3.3 慣性系の場の量子論

Unruh 効果の準備として, (1+1) 次元の質量 0 自由スカラー場を平坦な計量

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \quad (3.3.28)$$

において考える. 作用は

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [-(\partial_t \varphi)^2 + (\partial_x \varphi)^2] d^2 x \quad (3.3.29)$$

である. ここで光円錐座標 $x^\pm = t \pm x$ を導入すると, 運動方程式である Klein-Gordon 方程式は $\partial_{x^+} \partial_{x^-} \varphi = 0$ となり, この一般解は左進行波 $\varphi_+(x^+)$ と右進行波 $\varphi_-(x^-)$ の重ね合わせで

$$\varphi(x^-, x^+) = \varphi_-(x^-) + \varphi_+(x^+) \quad (3.3.30)$$

と書ける. ここで, Minkowski 時空は $t \rightarrow t + c$ の時間並進で不変な対称性があり

$$\xi_M = \xi_M^\mu \partial_\mu \equiv \partial_t, \quad \xi_M^2 = \eta_{\mu\nu} \xi_M^\mu \xi_M^\nu = -1 \quad (3.3.31)$$

の大域的な時間的 Killing ベクトル ξ_M をもつ. このとき各進行波は平面波モード解と

$$[\hat{a}_\omega^s, \hat{a}_{\omega'}^{s'\dagger}] = \delta_{s's'} \delta(\omega - \omega') \quad (s = \pm) \quad (3.3.32)$$

を満たす生成消滅演算子を用いて

$$\hat{\varphi}_s(x^s) = \int_0^\infty \left[\hat{a}_\omega^s e^{-i\omega x^s} + \hat{a}_\omega^{s\dagger} e^{i\omega x^s} \right] \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (3.3.33)$$

と量子化できる.

また, $\hat{\Pi}_s(x^s) \equiv \partial_{x^s} \hat{\varphi}_s(x^s)$ で定義される場合は

$$\hat{\Pi}_s(x^s) = -i \int_0^\infty \left[\hat{a}_\omega^s e^{-i\omega x^s} - \hat{a}_\omega^{s\dagger} e^{i\omega x^s} \right] \sqrt{\frac{\omega}{4\pi}} \quad (3.3.34)$$

と量子化され

$$\left[\hat{\Pi}_s(x), \hat{\Pi}_{s'}(y) \right] = \frac{i}{2} \delta_{s's'} \partial_x \delta(x - y) \quad (3.3.35)$$

の交換関係を満たす。(この $\hat{\Pi}$ は正準交換関係を満たす演算子ではないことに注意)

エネルギー密度演算子は

$$\hat{\epsilon}(t, x) \equiv \frac{1}{2} : (\partial_t \hat{\varphi})^2 : + \frac{1}{2} : (\partial_x \hat{\varphi})^2 : \quad (3.3.36)$$

で定義されるが, これは $\hat{\Pi}_s$ を用いて各進行波成分 $\hat{\epsilon}_s(x^s) \equiv: \Pi_s(x^s) :$ で分解できて

$$\hat{\epsilon}(t, x) = \hat{\epsilon}_+(x^+) + \hat{\epsilon}_-(x^-) \quad (3.3.37)$$

となる. ハミルトニアンも各進行波成分の和で

$$\hat{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\epsilon}(t, x) dx = \hat{H}_+ + \hat{H}_-, \quad \hat{H}_s = \int_0^{\infty} \omega \hat{a}_\omega^{s\dagger} \hat{a}_\omega^s d\omega \quad (3.3.38)$$

真空状態 $|0_M\rangle$ は,

$$\hat{a}_\omega^s |0_M\rangle = 0 \quad \forall s, \omega \quad (3.3.39)$$

で定義され, $\hat{H} |0_M\rangle = 0$ および個数演算子 $\hat{N}_a \equiv \sum_{s=\pm} \int_0^{\infty} \hat{a}_\omega^{s\dagger} \hat{a}_\omega^s d\omega$ に対して $\hat{N}_a |0_M\rangle = 0$ を満たす. この真空における $\hat{\Pi}_+(x)$ の 2 点関数は,

$$G(x - x') = \langle 0_M | \hat{\Pi}_+(x) \hat{\Pi}_+(x') | 0_M \rangle = -\frac{1}{4\pi(x - x' - i\epsilon)^2} \quad (3.3.40)$$

となる. また左進行波成分の結果をパリティ変換をすれば右進行波成分の結果が得られる.

3.4 一様加速度系の場の量子論

次に新たな座標系 (τ, r) を κ を正の定数として

$$t = r \sinh(\kappa\tau) \quad (3.4.41)$$

$$x = r \cosh(\kappa\tau) \quad (3.4.42)$$

$$(-\infty < \tau < \infty, \quad 0 < r < \infty)$$

として導入すると, 計量は

$$ds^2 = -(\kappa r)^2 d\tau^2 + dr^2 \quad (3.4.43)$$

となる. この座標系は Minkowski 時空のうち $\{x > |t|\} \cup \{x < -|t|\}$ の領域のみを覆い, この領域を Rindler 時空と呼ぶ. $r = C$ (一定) の軌跡は, 固有加速度が $a^\mu = (\frac{1}{C} \sinh(\kappa\tau), \frac{1}{C} \cosh(\kappa\tau))$ の軌跡になっており, 大きさ $\frac{1}{C}$ の等加速度運動になっている. さらに座標 (τ, u) を

$$t = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa u} \sinh(\kappa\tau) \quad (3.4.44)$$

$$x = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa u} \cosh(\kappa\tau) \quad (3.4.45)$$

$$(-\infty < u < \infty, \quad -\infty < \tau < \infty)$$

で導入すると、計量は

$$ds^2 = e^{2\kappa u}(-d\tau^2 + du^2) \quad (3.4.46)$$

となる。この座標系は Rindler 時空のうち $x > |t|$ の領域 R のみを覆う。また $\xi = C'$ (一定) の軌跡は (τ, r) 座標で $r = \frac{1}{\kappa}e^{\kappa C'}$ の軌跡であるから大きさ $\kappa e^{-\kappa C'}$ の一様加速度運動を表す。

ここでも光円錐座標 $u^\pm \equiv \tau \pm u$ を導入すると、(3.4.44),(3.4.45) は

$$x^\pm = \pm \frac{1}{\kappa} e^{\pm \kappa u^\pm} \quad (3.4.47)$$

でまとめられて、運動方程式は $\partial_{u^+}\partial_{u^-}\varphi = 0$ となるので、慣性系の場合と同様に一般解は左進行波と右進行波の和

$$\varphi(u^-, u^+) = \varphi_{-R}(u^-) + \varphi_{+R}(u^+) \quad (3.4.48)$$

で書けて、各進行波成分は

$$\hat{\varphi}_{sR}(u^s) = \int_0^\infty \left[\hat{b}_\omega^s e^{-i\omega u^s} + \hat{b}_\omega^{s\dagger} e^{i\omega u^s} \right] \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (3.4.49)$$

$$[\hat{b}_\omega^s, \hat{b}_{\omega'}^{s'\dagger}] = \delta_{ss'} \delta(\omega - \omega') \quad (3.4.50)$$

と量子化される。ハミルトニアンは

$$\hat{H}_R = \hat{H}_{+R} + \hat{H}_{-R}, \quad \hat{H}_{sR} = \int_0^\infty \omega \hat{b}_\omega^{s\dagger} \hat{b}_\omega^s d\omega \quad (3.4.51)$$

とかける。

計量 (3.4.46) は $\tau \rightarrow \tau + c$ の時間並進で不変な対称性を持ち、 $\xi_R \equiv \partial_\tau$ はこの時空の時間的 Killing ベクトルとなっている。ハミルトニアン (3.4.51) はこの時間座標 τ に関する並進の生成子であるが、 $\xi_R = \partial_\tau = \frac{1}{\kappa}(x^+ \partial_{x^+} - x^- \partial_{x^-}) = \frac{1}{\kappa}(t \partial_x + x \partial_t)$ であるから、慣性系でみるとこれはローレンツ変換の生成子になっており (3.3.38) とは異なる。

真空状態 $|0_R\rangle$ は

$$\hat{b}_\omega^s |0_R\rangle = 0 \quad \forall s, \omega \quad (3.4.52)$$

で定義され、 $\hat{H}_R |0_R\rangle = 0$ および個数演算子 $\hat{N}_b \equiv \sum_{s=\pm} \int_0^\infty \hat{b}_\omega^{s\dagger} \hat{b}_\omega^s d\omega$ に対して $\hat{N}_b |0_R\rangle = 0$ を満たす。状態 $|0_R\rangle$ は Rindler 真空状態と呼ばれ、慣性系からみると $|0_M\rangle$ とは異なっている。

$\hat{\Pi}_{sR}(u^s) \equiv \partial_{u^s} \hat{\varphi}_{sR}(u^s)$ で定義される場

$$\hat{\Pi}_{sR}(u^s) = -i \int_0^\infty \left[\hat{b}_\omega^s e^{-i\omega u^s} - \hat{b}_\omega^{s\dagger} e^{i\omega u^s} \right] \sqrt{\frac{\omega}{4\pi}} d\omega \quad (3.4.53)$$

の真空 $|0_M\rangle$ における 2 点関数は (3.3.40) を用いて

$$\begin{aligned} \langle 0_M | \hat{\Pi}_{+R}(u_1^+) \hat{\Pi}_{+R}(u_2^+) | 0_M \rangle &= \frac{dx_1^+}{du_1^+} \frac{dx_2^+}{du_2^+} \langle 0_M | \hat{\Pi}_+(x_1^+) \hat{\Pi}_+(x_2^+) | 0_M \rangle \\ &= -\frac{\kappa^2}{16\pi \sinh^2\left(\frac{\kappa}{2}(u_1^+ - u_2^+ - i\epsilon)\right)} \end{aligned} \quad (3.4.54)$$

と計算される。

ここで温度 $\frac{1}{\beta} = \frac{\kappa}{2\pi}$ の Gibbs 状態

$$\hat{\rho}_R(\beta) = \frac{e^{-\beta\hat{H}_R}}{\text{Tr}[e^{-\beta\hat{H}_R}]} \quad (3.4.55)$$

を考える。この状態における 2 点関数は

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\Pi}_{+R}(u_1^+) \hat{\Pi}_{+R}(u_2^+) \right\rangle_\beta &\equiv \text{Tr} \left[\hat{\Pi}_{+R}(u_1^+) \hat{\Pi}_{+R}(u_2^+) \hat{\rho}_R(\beta) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{e^{\beta\omega} - 1} e^{i\omega(u_1^+ - u_2^+)} d\omega \\ &= -\frac{\kappa^2}{16\pi \sinh^2\left(\frac{\kappa}{2}(u_1^+ - u_2^+ - i\epsilon)\right)} \end{aligned} \quad (3.4.56)$$

となる。ここで

$$\left\langle \hat{b}_\omega^{+\dagger} \hat{b}_{\omega'}^+ \right\rangle_\beta = \frac{\delta(\omega - \omega')}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad \left\langle \hat{b}_\omega^+ \hat{b}_{\omega'}^+ \right\rangle_\beta = 0 \quad (3.4.57)$$

およびフーリエ変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{e^{\pi\omega} - 1} e^{i\omega x} d\omega = -\frac{1}{\sinh^2(x - i\epsilon)} \quad (3.4.58)$$

を用いた。よって

$$\langle 0_M | \hat{\Pi}_{+R}(u_1^+) \hat{\Pi}_{+R}(u_2^+) | 0_M \rangle = \left\langle \hat{\Pi}_{+R}(u_1^+) \hat{\Pi}_{+R}(u_2^+) \right\rangle_\beta \quad (3.4.59)$$

であることが分かる。

真空 $|0_M\rangle$ は Gauss 状態であるから場の 2 点関数のみで一意に特徴づけられるため、(3.4.59) は

$$\hat{\rho}_R\left(\beta = \frac{\kappa}{2\pi}\right) = \text{Tr}_R[|0_M\rangle\langle 0_M|] \quad (3.4.60)$$

であることを意味する。以上より真空状態 $|0_M\rangle$ での場の揺らぎは一様加速度系では温度 $T = \frac{2\pi}{\kappa}$ の熱浴での揺らぎとして観測される。これは Unruh 効果と呼ばれる。

3.5 Unruh 効果と真空の量子エンタングルメント

前節の Unruh 効果は、Rindler 時空の 2 領域間の量子エンタングルメントの効果としてみるこ
とができる。

前節までは Rindler 領域のうち $x > |t|$ の領域 R のみを解析していたが、座標 (\bar{t}, v) を

$$t = \frac{1}{\kappa} e^{\kappa v} \sinh(\kappa \bar{t}) \quad (3.5.61)$$

$$x = -\frac{1}{\kappa} e^{\kappa v} \cosh(\kappa \bar{t}) \quad (3.5.62)$$

で導入すると、これは Rindler 時空のうち $x < -|t|$ の領域 L を覆う。領域 R のときと同様に光円錐座標を $v^\pm = \bar{r} \pm v$ で定義すると、元の光円錐座標との関係は

$$x^\pm = \mp \frac{1}{\kappa} e^{\mp \kappa v^\mp} \quad (3.5.63)$$

と書ける。場は (3.3.30) のように左進行波と右進行波の和で書けるので、まず左進行波 $\hat{\varphi}_+(x^+)$ を解析する。

$x^+ > 0$ において場は

$$\hat{\varphi}_+(x^+) = \int_0^\infty d\omega \left[\hat{b}_\omega^+ f_\omega^R(u^+) + \text{h.c.} \right] \quad (3.5.64)$$

$$f_\omega^R(u^+) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u^+} \quad (3.5.65)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} (\kappa x^+)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \quad (3.5.66)$$

$$[\hat{b}_\omega^+, \hat{b}_{\omega'}^{+\dagger}] = \delta(\omega - \omega') \quad (3.5.67)$$

と量子化でき、一方 $x^+ < 0$ では

$$\hat{\varphi}_+(x^+) = \int_0^\infty d\omega \left[\hat{c}_\omega^+ f_\omega^L(v^-) + \text{h.c.} \right] \quad (3.5.68)$$

$$f_\omega^L(v^-) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v^-} \quad (3.5.69)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} (-\kappa x^+)^{\frac{i\omega}{\kappa}} \quad (3.5.70)$$

$$[\hat{c}_\omega^+, \hat{c}_{\omega'}^{+\dagger}] = \delta(\omega - \omega') \quad (3.5.71)$$

と量子化できる。したがって左進行波全体は

$$\hat{\varphi}_+(x^+) = \int_0^\infty d\omega \left\{ \Theta(x^+) \left[\hat{b}_\omega^+ f_\omega^R(u^+) + \text{h.c.} \right] + \Theta(-x^+) \left[\hat{c}_\omega^+ f_\omega^L(v^-) + \text{h.c.} \right] \right\} \quad (3.5.72)$$

と量子化される。ここで $\Theta(x)$ は Heaviside の階段関数で、Rindler 真空 $|0_R\rangle$ は

$$\hat{b}_\omega^+ |0_R\rangle = \hat{c}_\omega^+ |0_R\rangle = 0 \quad \forall \omega \quad (3.5.73)$$

で定義される。一方、通常の Minkowski 時空の正エネルギー完全解で

$$\hat{\varphi}_+(x^+) = \int_0^\infty \left[\hat{a}_\omega^+ e^{-i\omega x^+} + \text{h.c.} \right] \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (3.5.74)$$

とも量子化でき、これらは

$$\Theta(x^+) f_\omega^R(u^+) = \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \left(\alpha_{\omega\omega'}^R e^{-i\omega' x^+} + \beta_{\omega\omega'}^R e^{i\omega' x^+} \right) \quad (3.5.75)$$

$$\Theta(-x^+) f_\omega^L(v^-) = \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \left(\alpha_{\omega\omega'}^L e^{-i\omega' x^+} + \beta_{\omega\omega'}^L e^{i\omega' x^+} \right) \quad (3.5.76)$$

の Bogoliubov 変換で繋がる。Bogoliubov 係数は

$$\begin{aligned}\alpha_{\omega\omega'}^R &= \sqrt{4\pi\omega'} \int_0^\infty \frac{dx^+}{2\pi} f_\omega^R(x^+) e^{i\omega'x^+} \\ &= \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_0^\infty \frac{dx^+}{2\pi} (\kappa x^+)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} e^{i\omega'x^+}\end{aligned}\quad (3.5.77)$$

だが、これは $x^+ = \frac{ix}{\omega'}$ と変数変換し、積分路を正の虚軸に変換すると、

$$\begin{aligned}\alpha_{\omega\omega'}^R &= \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_0^{i\infty} \frac{i}{2\pi} \frac{dx}{\omega'} \left(\frac{i\kappa}{\omega'}\right)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} e^{-x} \\ &= \frac{ie^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}}}{\sqrt{\omega\omega'}} \left(\frac{\kappa}{\omega'}\right)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \int_0^\infty \frac{dx}{2\pi} x^{-\frac{i\omega}{\kappa}} e^{-x} \\ &= \frac{ie^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}}}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \left(\frac{\kappa}{\omega'}\right)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \Gamma\left[1 - \frac{i\omega}{\kappa}\right]\end{aligned}\quad (3.5.78)$$

のように具体的にガンマ関数を用いて書くことができる。 $\beta_{\omega\omega'}^R$ に関しては (3.5.77) の $e^{i\omega'x^+}$ を $e^{-i\omega'x^+}$ に置き換え、 $x^+ = -\frac{ix}{\omega'}$ と変数変換することで、

$$\beta_{\omega\omega'}^R = -\frac{ie^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}}}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \left(\frac{\kappa}{\omega'}\right)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \Gamma\left[1 - \frac{i\omega}{\kappa}\right]\quad (3.5.79)$$

と求まる。同様にして

$$\alpha_{\omega\omega'}^L = -\frac{ie^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}}}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \left(\frac{\kappa}{\omega'}\right)^{\frac{i\omega}{\kappa}} \Gamma\left[1 + \frac{i\omega}{\kappa}\right]\quad (3.5.80)$$

$$\beta_{\omega\omega'}^L = \frac{ie^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}}}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \left(\frac{\kappa}{\omega'}\right)^{\frac{i\omega}{\kappa}} \Gamma\left[1 + \frac{i\omega}{\kappa}\right]\quad (3.5.81)$$

と求まる。これらから

$$\beta_{\omega\omega'}^R = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \alpha_{\omega\omega'}^{L*}\quad (3.5.82)$$

$$\beta_{\omega\omega'}^L = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \alpha_{\omega\omega'}^{R*}\quad (3.5.83)$$

の関係が成り立つことがわかる。これらを用いると次の2つの関数、

$$\begin{aligned}F_\omega^{(1)}(x^+) &\equiv C_\omega^{(1)}[\Theta(x^+)f_\omega^R(u^+) + \Theta(-x^+)e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}f_\omega^{L*}(v^-)] \\ &= C_\omega^{(1)}(1 - e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}}) \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \alpha_{\omega\omega'}^R e^{-i\omega'x^+}\end{aligned}\quad (3.5.84)$$

$$\begin{aligned}F_\omega^{(2)}(x^+) &\equiv C_\omega^{(2)}[\Theta(-x^+)f_\omega^L(v^-) + \Theta(x^+)e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}f_\omega^{R*}(u^+)] \\ &= C_\omega^{(2)}(1 - e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}}) \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\sqrt{4\pi\omega'}} \alpha_{\omega\omega'}^L e^{-i\omega'x^+}\end{aligned}\quad (3.5.85)$$

が $e^{-i\omega'x^+}$ の線形結合であり、Minkowski 時空の Killing ベクトル ∂_t に関する正エネルギー完全解となることがわかる。 $C_\omega^{(i)}$ ($i = 1, 2$) は規格化定数で、 $f_\omega^R(u^+)$ と $f_\omega^L(v^-)$ の直交性を用いると、

$$\begin{aligned}\langle F_\omega^{(i)}(x^+), F_\omega^{(i)}(x^+) \rangle &= |C_\omega^{(i)}|^2 [\langle f_\omega^R(u^+), f_\omega^R(u^+) \rangle - e^{-2\frac{\pi\omega}{\kappa}} \langle f_\omega^L(v^-), f_\omega^L(v^-) \rangle] \\ &= 2|C_\omega^{(i)}|^2 e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \sinh\left(\frac{\pi\omega}{\kappa}\right) \langle f_\omega^R(u^+), f_\omega^R(u^+) \rangle\end{aligned}\quad (3.5.86)$$

より

$$C_\omega^{(i)} = \frac{e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa}}}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{\kappa}\right)}} \quad (3.5.87)$$

と求めることができる。逆に

$$\Theta(x^+) f_\omega^R(u^+) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{\kappa}\right)}} (e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa}} F_\omega^{(1)}(x^+) - e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}} F_\omega^{(2)*}(x^+)) \quad (3.5.88)$$

$$\Theta(-x^+) f_\omega^L(v^-) = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{\kappa}\right)}} (e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa}} F_\omega^{(2)}(x^+) - e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}} F_\omega^{(1)*}(x^+)) \quad (3.5.89)$$

と書けるので、(3.5.72)に代入すると

$$\hat{\varphi}_+(x^+) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{\kappa}\right)}} \left[F_\omega^{(1)}(x^+) (e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{b}_\omega^+ - e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{c}_\omega^{+\dagger}) + F_\omega^{(2)}(x^+) (e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{c}_\omega^+ - e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{b}_\omega^{+\dagger}) + \text{h.c.} \right] \quad (3.5.90)$$

となる。\$F_\omega^{(1)}\$, \$F_\omega^{(2)}\$ は Minkowski 時空の正エネルギー完全解なので、Minkowski 真空 \$|0_M\rangle\$ は演算子

$$\hat{a}_\omega^{(1)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{\kappa}\right)}} (e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{b}_\omega^+ - e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{c}_\omega^{+\dagger}) \quad (3.5.91)$$

$$\hat{a}_\omega^{(2)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{\kappa}\right)}} (e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{c}_\omega^+ - e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{b}_\omega^{+\dagger}) \quad (3.5.92)$$

を定義すると、

$$\hat{a}_\omega^{(1)} |0_M\rangle = 0 \quad (3.5.93)$$

$$\hat{a}_\omega^{(2)} |0_M\rangle = 0 \quad (\forall\omega) \quad (3.5.94)$$

を満たす。また \$\hat{b}_\omega^+\$, \$\hat{c}_\omega^+\$ は

$$\hat{b}_\omega^+ = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega/\kappa)}} (e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{a}_\omega^{(1)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{a}_\omega^{(2)\dagger}) \quad (3.5.95)$$

$$\hat{c}_\omega^+ = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega/\kappa)}} (e^{\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{a}_\omega^{(2)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \hat{a}_\omega^{(1)\dagger}) \quad (3.5.96)$$

と表されるので、領域 R の Rindler 粒子の左進行波の個数演算子 \$\hat{N}_\omega^{R+} \equiv \sum_s \hat{b}_\omega^{+\dagger} \hat{b}_\omega^+\$ の Minkowski 真空での期待値は

$$\begin{aligned} \langle 0_M | \hat{N}_\omega^{R+} | 0_M \rangle &= \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}}{2 \sinh(\pi\omega/\kappa)} \langle 0_M | [\hat{a}_\omega^{(2)}, \hat{a}_\omega^{(2)\dagger}] | 0_M \rangle \\ &= \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \langle F_\omega^{(2)}(x^+), F_\omega^{(2)}(x^+) \rangle \\ &= \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \end{aligned} \quad (3.5.97)$$

という温度 \$T = \frac{\kappa}{2\pi}\$ の Planck 分布となることがわかる。

具体的に Minkowski 真空 $|0_M\rangle$ の量子エンタングルメントを見るために Rindler 真空 $|0_R\rangle$ で表すことを考える.

まず

$$|0_M\rangle = \prod_{\omega} K(\hat{b}_{\omega}^{+\dagger}, \hat{c}_{\omega}^{+\dagger}) |0_R\rangle \quad (3.5.98)$$

の形を仮定する. K は $\hat{b}_{\omega}^{+\dagger}, \hat{c}_{\omega}^{+\dagger}$ の関数で, $[\hat{b}_{\omega}^{+\dagger}, \hat{b}_{\omega'}^{+\dagger}] = [\hat{c}_{\omega}^{+\dagger}, \hat{c}_{\omega'}^{+\dagger}] = \delta(\omega - \omega')$ より

$$\hat{b}_{\omega}^{+\dagger} K |0_R\rangle = [\hat{b}_{\omega}^{+\dagger}, K] |0_R\rangle = \frac{\partial K}{\partial \hat{b}_{\omega}^{+\dagger}} |0_R\rangle \quad (3.5.99)$$

$$\hat{c}_{\omega}^{+\dagger} K |0_R\rangle = [\hat{c}_{\omega}^{+\dagger}, K] |0_R\rangle = \frac{\partial K}{\partial \hat{c}_{\omega}^{+\dagger}} |0_R\rangle \quad (3.5.100)$$

が成り立つ. さらに (3.5.93), (3.5.94) に代入し, (3.5.91), (3.5.92) の関係を用いると,

$$\frac{\partial K}{\partial \hat{b}_{\omega}^{+\dagger}} = e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \hat{c}_{\omega}^{+\dagger} K \quad (3.5.101)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \hat{c}_{\omega}^{+\dagger}} = e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \hat{b}_{\omega}^{+\dagger} K \quad (3.5.102)$$

が得られ, これを満たす K は

$$K(\hat{b}_{\omega}^{+\dagger}, \hat{c}_{\omega}^{+\dagger}) \propto \exp(e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \hat{b}_{\omega}^{+\dagger} \hat{c}_{\omega}^{+\dagger}) \quad (3.5.103)$$

であることがわかる.

$$\exp(e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \hat{b}_{\omega}^{+\dagger} \hat{c}_{\omega}^{+\dagger}) |0_R\rangle = \sum_{n(\omega)=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi\omega n(\omega)}{\kappa}} |n(\omega)\rangle_R \otimes |n(\omega)\rangle_L \quad (3.5.104)$$

から

$$\langle 0_R | \exp(e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \hat{c}_{\omega}^{+\dagger} \hat{b}_{\omega}^{+\dagger}) \exp(e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \hat{b}_{\omega}^{+\dagger} \hat{c}_{\omega}^{+\dagger}) |0_R\rangle = \sum_{n(\omega)=0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi\omega n(\omega)}{\kappa}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}}} \quad (3.5.105)$$

なので, 規格化定数も含めると

$$|0_M\rangle = \prod_{\omega} \sqrt{1 - e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}}} \exp(e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \hat{b}_{\omega}^{+\dagger} \hat{c}_{\omega}^{+\dagger}) |0_R\rangle = \prod_{\omega} \sqrt{1 - e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}}} \sum_{n(\omega)=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi\omega n(\omega)}{\kappa}} |n(\omega)\rangle_R \otimes |n(\omega)\rangle_L \quad (3.5.106)$$

となる. ここで $|n(\omega)\rangle_R = \frac{(\hat{b}_{\omega}^{+\dagger})^{n(\omega)}}{\sqrt{n!}} |0_R\rangle$, $|n(\omega)\rangle_L = \frac{(\hat{c}_{\omega}^{+\dagger})^{n(\omega)}}{\sqrt{n!}} |0_R\rangle$ で, 各領域で振動数 ω の Rindler 粒子の励起状態を表す. この状態は $\tanh \theta_{\omega} = e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}$ で θ_{ω} を定義すると,

$$|0_M\rangle = \prod_{\omega} \sum_{n(\omega)=0}^{\infty} \frac{\tanh^{n(\omega)} \theta_{\omega}}{\cosh \theta_{\omega}} |n(\omega)\rangle_R \otimes |n(\omega)\rangle_L \quad (3.5.107)$$

と書ける. これはスキージングパラメーターを $\frac{2\pi\omega}{\kappa}$ とする 2 モードスキージング状態であり, Rindler 時空の領域 R と領域 L の間で量子エンタングルメントがあることが分かる. これまで左

進行波のみを解析してきたが³, 右進行波でも同様の結果が得られる. 右進行波の演算子も含め

$$[\hat{b}_\omega^s, \hat{b}_{\omega'}^{s'\dagger}] = \delta_{ss'} \delta(\omega - \omega') \quad [\hat{c}_\omega^s, \hat{c}_{\omega'}^{s'\dagger}] = \delta_{ss'} \delta(\omega - \omega') \quad \left(s = \begin{cases} + & (\text{左進行波}) \\ - & (\text{右進行波}) \end{cases} \right) \quad (3.5.108)$$

を定義すると, 全自由度を含めた最終的な結果は

$$|0_M\rangle = \prod_{\omega, s=\pm} \sqrt{1 - e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}}} \left(\sum_{n(\omega, s)=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi\omega n(\omega, s)}{\kappa}} |n(\omega, s)\rangle_R \otimes |n(\omega, s)\rangle_L \right) \quad (3.5.109)$$

となる. 領域 L の自由度を縮約し領域 R の縮約密度行列を求めると

$$\hat{\rho}_R = \prod_{\omega, s} (1 - e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa}}) \sum_{n(\omega, s)=0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi\omega n(\omega, s)}{\kappa}} |n(\omega, s)\rangle_R \langle n(\omega, s)|_R = \frac{\exp(-\frac{2\pi}{\kappa} \hat{H}_R)}{\text{Tr}[\exp(-\frac{2\pi}{\kappa} \hat{H}_R)]} \quad (3.5.110)$$

となり, 温度 $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ の Gibbs 状態になっていることがみてとれる.

3.6 真空のエンタングルメントエントロピー^{*4}

領域 R を等加速度 κ で運動する観測者にとって領域 L は space-like な位置にあり, 因果的に関係をもつことはない. したがって局所的操作は領域 R に限定され, この観測者にとっての場の状態は領域 L の自由度を縮約した

$$\hat{\rho}_R = \text{Tr}_L[|0_M\rangle \langle 0_M|] = \frac{\exp\left(-\frac{2\pi}{\kappa} \hat{H}_R\right)}{\text{Tr}\left[\exp\left(-\frac{2\pi}{\kappa} \hat{H}_R\right)\right]} \quad (3.6.111)$$

という Gibbs 状態で与えられる. 領域 R と L の場の揺らぎ間の量子エンタングルメントを定量化する為にエンタングルメントエントロピー S を考える.

(τ, u) 座標系で張られる平坦な時空中を一様に満たす温度 $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ の輻射の熱的エントロピーは, エントロピー密度 ρ_{th} が³

$$\rho_{th} = \frac{\pi}{3} T \quad (3.6.112)$$

で与えられることから, 領域 $[u_1, u_2]$ で

$$S_{th} = \int_{u_1}^{u_2} \rho_{th} du = \rho_{th}(u_2 - u_1) \quad (3.6.113)$$

となる. これは慣性系 (t, x) でみると

$$S_{th} = \frac{\rho_{th}}{\kappa} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (3.6.114)$$

^{*4}この節での議論は主に [4] による

領域 R の全範囲を考えると，境界 $x_1 = 0$ と $x_2 = \infty$ の寄与からこの S_{th} は発散する．そこで有限のカットオフ

$$x_1 = \epsilon_0 \sim 0 \quad (3.6.115)$$

$$x_2 = L_0 \sim \infty \quad (3.6.116)$$

を導入すると，(3.6.112),(3.6.113) から

$$S = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\kappa}{2\pi} \right) \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{L_0}{\epsilon_0} \right) = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{L_0}{\epsilon_0} \right) \quad (3.6.117)$$

加速度 κ は座標変換 (3.4.44),(3.4.45) の選択によるものであるから，慣性系において定義される $|0_M\rangle$ の量子エンタングルメントには現れなくなっている．

ここで光円錐座標 x^\pm を

$$x^\pm = x_0 \frac{\sin \left(\frac{\pi}{\tilde{L}} (l - \zeta^\pm) \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{\tilde{L}} \zeta^\pm \right)} \quad (3.6.118)$$

と変換し， $\zeta^\pm \equiv \tau_\zeta \pm \zeta$ で定義される座標系 (τ_ζ, ζ) を考える．ここで l, \tilde{L} は $l \leq \tilde{L}$ を満たす正数， x_0 は長さの次元をもつ定数である．この座標系での時刻 $\tau_\zeta = 0$ で (3.6.117) を書き直す．空間座標 ζ は長さ \tilde{L} の円周上を張り，領域 R は $\zeta = [0, l]$ に，領域 L は $\zeta = [l, \tilde{L}]$ に写像される．またカットオフ (3.6.115),(3.6.116) は

$$\epsilon_0 = x_0 \frac{\pi}{\tilde{L}} \frac{\epsilon_2}{\sin \left(\frac{\pi}{\tilde{L}} l \right)} \quad (3.6.119)$$

$$L_0 = \frac{x_0 \tilde{L}}{\pi \epsilon_1} \sin \left(\frac{\pi}{\tilde{L}} l \right) \quad (3.6.120)$$

で繋がる ζ 座標でのカットオフ ϵ_1, ϵ_2 に変換され，領域 R のカットオフされた領域 $[\epsilon_0, L_0]$ は ζ 座標系での $[\epsilon_1, l - \epsilon_2]$ に写像される．

この座標系では $|0_M\rangle$ が長さ \tilde{L} の円周上の質量 0 スカラー場の基底状態 $|0(\tilde{L})\rangle$ に写像されており， S は状態 $|0(\tilde{L})\rangle$ での領域 $[0, l]$ と $[l, \tilde{L}]$ の間の量子エンタングルメントエントロピーとみなせる．(3.6.119),(3.6.120) を (3.6.117) に代入すれば，

$$S = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\tilde{L}}{\pi \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}} \sin \left(\frac{\pi}{\tilde{L}} l \right) \right) \quad (3.6.121)$$

これは領域 R の大きさを示すパラメータ l を $l \rightarrow \tilde{L} - l$ と入れ替えても不変であり，量子エンタングルメントエントロピーの領域 R と L に対する対称性を表している． $\epsilon \equiv \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$ と定義し， $\tilde{L} \rightarrow \infty$ の極限をとると，(3.6.121) は

$$S = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{l}{\epsilon} \right) \quad (3.6.122)$$

となる．この極限では ζ 座標系は慣性系と解釈できて， $|0(\tilde{L})\rangle$ は $|0_M\rangle$ に戻る．

領域 $(-\infty, \infty)$ で定義される質量 0 スカラー場の真空状態 $|0_M\rangle$ における $[0, l]$ とその外部との量

子エンタングルメントエントロピーが (3.6.122) で与えられることになる. この式は5章で動的鏡模型で量子エンタングルメントを議論する際に用いる.

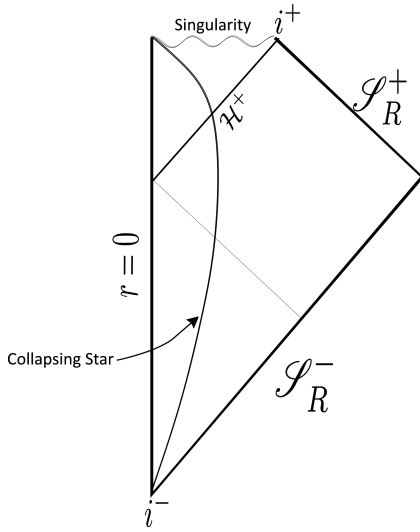


図2 星の重力崩壊

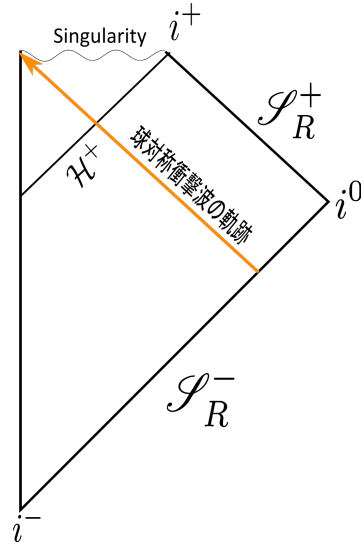


図3 球対称衝撃波による重力崩壊の Penrose 図

4 Hawking 輻射

この章では、Hawking によって示された重力崩壊を起こしブラックホールが形成する時空において、温度一定の輻射が放射される現象 (Hawking 輻射) と、情報損失問題について解説する。

4.1 球対称重力崩壊過程を記述する時空

球対称な星が重力崩壊を起こしブラックホールが生成する過程を考える。球対称な衝撃波が光速で潰れてくるとすると、時空は衝撃波が通過する前は平坦であり、衝撃波通過後は Birkoff の定理 [15] があるため、計量は次の形になる。

$$ds^2 = \begin{cases} -d\tau^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 & (\text{衝撃波通過前}) \\ -\lambda^2 dt^2 + \lambda^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 & (\text{衝撃波通過後}) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

次に座標変換

$$U = \tau - r, \quad V = \tau + r \quad (4.1.2)$$

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_* \quad (4.1.3)$$

$$\frac{dr_*}{dr} = \lambda^{-2} \quad (4.1.4)$$

を考えると、計量は

$$ds^2 = \begin{cases} -dU dV + r^2 d\Omega^2 & (\text{衝撃波通過前}) \\ -\lambda^2 du dv + r^2 d\Omega^2 & (\text{衝撃波通過後}) \end{cases} \quad (4.1.5)$$

となる。衝撃波の軌跡を跨いで時空全領域を覆う座標系を構成するために、 $U(u), V(v)$ の満たす条件として、無限大の過去では時空は平坦であることから

$$V(v) = v \quad (4.1.6)$$

さらに衝撃波の軌跡 $v = v_s$ に沿って r はどちらの座標系でも一致するとして、

$$V - U = 2r \quad (4.1.7)$$

$$v - u = 2r_*(r) \quad (4.1.8)$$

から、

$$r_* \left(\frac{v_s - U(u)}{2} \right) = \frac{v_s - u}{2} \quad (4.1.9)$$

両辺を u で微分し球殻の軌跡上で評価すると、

$$\frac{dU(u)}{du} = \lambda^2(u, v_s) \quad (4.1.10)$$

を得、計量は

$$ds^2 = \begin{cases} -\lambda^2(u, v_s) dudv + r^2 d\Omega^2 & (v \leq v_s) \\ -\lambda^2(u, v) dudv + r^2 d\Omega^2 & (v > v_s) \end{cases} \quad (4.1.11)$$

となり、衝撃波の軌跡を跨いで時空全体で単一の座標系が張られる。

原点 $r = 0$ の軌跡はこの座標系では $v = U(u)$ である。

例えば Schwarzschild 時空 $\lambda^2 = 1 - \frac{2M}{r}$ のとき、 $r_*(r) = r + 2M \ln \frac{r-2M}{2M}$ で、(4.1.9) を用いれば

$$u = U(u) - 4M \ln \frac{v_H - U(u)}{4M} \quad (4.1.12)$$

を得る。ここで $v_H \equiv v_s - 4M$ は事象の地平面を表す。(4.1.12) は

$$\exp\left(\frac{v_H - u}{4M}\right) = \left(\frac{v_H - U(u)}{4M}\right) \exp\left(\frac{v_H - u}{4M}\right) \quad (4.1.13)$$

と書けるので、Lambert 関数 W^{*5} を用いて

$$U(u) = v_H - 4MW \left[\exp\left(\frac{v_H - u}{4M}\right) \right] \quad (4.1.14)$$

となる。

4.2 Hawking 輻射の導出

ここでは [5] に基づいて Hawking 輻射の導出を行う。

*5 複素関数 $f(z) = ze^z$ に対し $z = f^{-1}(ze^z) = W(ze^z)$ を満たす関数を Lambert 関数という。

4.2.1 場の量子化

前述の時空上で質量0のスカラ場は Klein-Gordon 方程式

$$\square\phi = 0 \quad (4.2.15)$$

を満たす. 今場 $\phi(x)$ を球面調和関数 $Y_{lm}(\Omega)$ で

$$\phi(x) = \sum_{l,m} \frac{1}{r} \phi_l(t,r) Y_{lm}(\Omega) \quad (4.2.16)$$

と展開すると, Klein-Gordon 方程式は, $\phi_l(t,r)$ に対する微分方程式

$$[\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + V_l(r)]\phi_l(t,r) = 0 \quad (4.2.17)$$

$$V_l(r) \equiv \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_S}{r^3}\right] \quad (4.2.18)$$

になる. 有効ポテンシャル $V_l(r)$ は事象の地平面 ($r = r_S$) および $\mathcal{S}^\pm(r = \infty)$ では0になるため正エネルギー解の漸近形は, 外向きモード関数 $e^{-i\omega(t-r_*)} = e^{-i\omega u}$ と内向きモード関数 $e^{-i\omega(t+r_*)} = e^{-i\omega v}$ の線形結合となる.

まず Cauchy 面として $\Sigma = \mathcal{S}^-$ をとると, \mathcal{S}^- 近傍での正エネルギー解は次の漸近形をとる

$$f_I(x) \sim \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{4\pi\omega r}} Y_{lm}(\Omega) \quad [I \equiv (\omega, l, m)] \quad (4.2.19)$$

$\langle f_I, f_{I'} \rangle = \delta_{II'} = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ 等から (3.1.12), (3.1.13) を満たすので関数系 $\{f_I(x)\}$ は正エネルギー解の完全系である. よって場 $\phi(x)$ は

$$\hat{\phi}(x) = \sum_I \left[\hat{a}_I f_I(x) + \hat{a}_I^\dagger f_I^*(x) \right] \quad \left(\sum_I \equiv \int_0^\infty d\omega \sum_{l,m} \right) \quad (4.2.20)$$

$$[\hat{a}_I, \hat{a}_J^\dagger] = \delta_{IJ}, \quad [\hat{a}_I, \hat{a}_J] = [\hat{a}_I^\dagger, \hat{a}_J^\dagger] = 0 \quad (4.2.21)$$

と量子化され, \mathcal{S}^- 近傍での真空 $|0_{in}\rangle$ は

$$\hat{a}_I |0_{in}\rangle = 0 \quad \forall I \quad (4.2.22)$$

で定義できる.

次に Cauchy 面として $\Sigma' = \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{H}^+$ をとり, 正エネルギー解として \mathcal{S}^+ 上にもつ関数系 $\{p_I(x)\}$ と \mathcal{H}^+ にもつ関数系 $\{q_I(x)\}$ を考える. 先と同様に \mathcal{S}^+ 近傍で $p_I(x)$ は

$$p_I(x) \sim \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{4\pi\omega r}} Y_{lm}(\Omega) \quad (4.2.23)$$

の漸近形をとり，完全系 $\{p_I(x)\} \cup \{q_I(x)\}$ で場 $\phi(x)$ は

$$\hat{\phi}(x) = \sum_I \left[\hat{b}_I p_I(x) + \hat{b}_I^\dagger p_I^*(x) + \hat{c}_I q_I(x) + \hat{c}_I^\dagger q_I^*(x) \right] \quad (4.2.24)$$

と展開できて， $\mathcal{S}^+ \cup \mathcal{H}^+$ 近傍での真空 $|0_{out}\rangle$ は

$$\hat{b}_I |0_{out}\rangle = 0, \quad \hat{c}_I |0_{out}\rangle = 0 \quad \forall I \quad (4.2.25)$$

で定義できる．

二つの完全系 $\{p_I(x)\} \cup \{q_I(x)\}$ と $\{f_I(x)\}$ は次の Bogoliubov 変換で結ばれる．

$$p_I(x) = \sum_J (\alpha_{IJ} f_J(x) + \beta_{IJ} f_J^*(x)) \quad (4.2.26)$$

$$q_I(x) = \sum_J (\gamma_{IJ} f_J(x) + \eta_{IJ} f_J^*(x)) \quad (4.2.27)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_I \\ \hat{b}_I^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{IJ}^* & -\beta_{IJ}^* \\ -\beta_{IJ} & \alpha_{IJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_J \\ \hat{a}_J^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{c}_I \\ \hat{c}_I^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{IJ}^* & -\eta_{IJ}^* \\ -\eta_{IJ} & \gamma_{IJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_J \\ \hat{a}_J^\dagger \end{pmatrix} \quad (4.2.28)$$

このとき \mathcal{S}^+ で観測される粒子数の期待値は，

$$\langle 0_{in} | \hat{b}_I^\dagger \hat{b}_I | 0_{in} \rangle = \sum_{J,K} \beta_{IK} \beta_{IJ}^* \langle 0_{in} | \hat{a}_K \hat{a}_J^\dagger | 0_{in} \rangle = \sum_J |\beta_{IJ}|^2 \quad (4.2.29)$$

で与えられる．

4.2.2 粒子の生成

Bogoliubov 係数 α_{IJ}, β_{IJ} は，Klein-Gordon 内積を計算する Cauchy 面として \mathcal{S}^- をとると，

$$\alpha_{II'} = \langle p_I, f_{I'} \rangle = \delta_{II'} \delta_{mm'} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{i\omega'v} P_\omega(t, r)|_{\mathcal{S}^-} \quad (4.2.30)$$

$$\beta_{II'} = -\langle p_I, f_{I'}^* \rangle = \delta_{II'} \delta_{mm'} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-i\omega'v} P_\omega(t, r)|_{\mathcal{S}^-} \quad (4.2.31)$$

$p_I(x) = \frac{P_\omega(t, r)}{\sqrt{4\pi\omega r}} Y_{lm}(\omega)$ で，星の外側では $P_\omega(t, r) = p_\omega(r) e^{-i\omega u}$ と置く．ここで $\int d\Omega Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^* = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ を用いた．したがって $p_I(x)$ の \mathcal{S}^- 近傍での漸近形がわかればよい．

これは原理的には崩壊する星の時間変化を与えれば逆向きの時間発展を追うことで求められるが，今十分未来の観測者 (i^+ 近傍) を考えるとすれば，そこに到達する波は事象の地平面近傍に長い時間とどまっているので大きな青方偏移を受ける．したがって必要なのは Bogoliubov 係数の $\omega' \gg \omega$ の漸近形で，以下これを求めることにする．

$p_I(x)$ を \mathcal{S}^+ から時間を遡ると，崩壊する星の外部でポテンシャル $V_l(r)$ に反射され振動数は ω のまま \mathcal{S}^- に到達する $p_I^{(1)}(x)$ と，ポテンシャルを越え崩壊する星の内部に入り $r=0$ を通過して \mathcal{S}^- に到達する $p_I^{(2)}(x)$ に分けられる；

$$p_I(x) = p_I^{(1)}(x) + p_I^{(2)}(x) \quad (4.2.32)$$

前者 $\{p_I^{(1)}(x)\}$ と $\{f_I(x)\}$ 間の Bogoliubov 係数 $\beta^{(1)}$ は,

$$\beta_{II'}^{(1)} = 0 \quad (4.2.33)$$

となり粒子生成に寄与しないため, $\{p_I^{(2)}(x)\}$ のみを考えればよい.

まず最初に星の外部で動径方向の光的測地線が $u = \text{const}$ (外向き), $v = \text{const}$ (内向き) であることを見ておく. アフィンパラメーターを λ とする光的測地線 $X^\mu(\lambda)$ に対し, その接ベクトル $k^\mu = \frac{dX^\mu}{d\lambda}$ と Killing ベクトル ξ^μ の内積は測地線に沿って一定の保存量である.

今時空が静的かつ球対称であることから Killing ベクトル場は $t = \partial_t$ と $m = \partial_\varphi$ があり, それぞれの保存量を $-E$, J とすると,

$$\frac{dt}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} J = 0 \quad (4.2.34)$$

これと $g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$ であることから

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm E \quad (+ : \text{外向き}, - : \text{内向き}) \quad (4.2.35)$$

となり, 以上の結果を合わせると

$$\frac{d}{d\lambda}(t \mp r_*) = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{d\lambda} = 0 \text{ または } \frac{dv}{d\lambda} = 0 \quad (4.2.36)$$

を得る.

次に \mathcal{S}^- を出発した $v = \text{const}$ の光的測地線 ($\frac{dr}{d\lambda} = -E$) を考える. \mathcal{H}^+ で $\lambda = 0$ と原点をとり, \mathcal{H}^+ の外側で $\lambda < 0$ に注意すると, この内向きの光的測地線は

$$u = 2E\lambda - 4M \ln[-\lambda/C] \quad (C \text{ は正の積分定数}) \quad (4.2.37)$$

となり, \mathcal{H}^+ 近傍での漸近形は

$$u \sim -4M \ln[-\lambda/C] \quad (4.2.38)$$

となる. これより $p_I(x)$ の位相部分は \mathcal{H}^+ 近傍で $\exp[4i\omega M \ln(-\lambda/C)]$ となり, $\lambda \sim 0$ 付近で λ の変化に対し大きく振動する. そこで幾何光学近似^{*6}を用いて, 位相一定の波面の軌跡は \mathcal{S}^+ から光的測地線に沿って $r = 0$ を通過した後 \mathcal{S}^- に到達するもので与えられる.

このとき到達する \mathcal{S}^- 上の点を v とすると, \mathcal{H}^+ の内部に入ってしまうために v には上限 v_H が存在する. $|\lambda|$ が十分小さい範囲内では 2 点 v, v_H のアフィン距離は $v - v_H = D\lambda$ (D は正の定数) とかけるので, \mathcal{S}^- 近傍での $p_I^{(2)}(x) = \frac{P_{\omega l}^{(2)}(t, r)}{\sqrt{4\pi\omega r}} Y_{lm}(\Omega)$ の漸近形は

$$P_{\omega l}^{(2)}(t, r) \propto \begin{cases} 0 & (v > v_H) \\ e^{i\frac{\omega}{c} \ln(\frac{v_H - v}{CD})} & (v < v_H) \end{cases} \quad (4.2.39)$$

^{*6}位相 $S(x)$ の変化率が大きいとき, 位相一定面の法ベクトル場 $k_\mu(x) = \partial_\mu S(x)$ の積分曲線を粒子の軌跡とみなす近似. 質量 0 の場の場合は $k^\mu k_\mu = 0$, $k^\nu \nabla_\nu k^\mu = 0$ より近似の 0 次でこの軌跡は光的測地線となる.

ここで $\kappa \equiv \frac{1}{4M}$ とおいた. よって Bogoliubov 係数 $\alpha_{II'}^{(2)} = \alpha_{(\omega lm)(\omega' lm)}^{(2)} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$, $\beta_{II'}^{(2)} = \beta_{(\omega lm)(\omega' lm)}^{(2)} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ の $\omega' \gg \omega$ に対する漸近形は

$$\alpha_{(\omega lm)(\omega' lm)}^{(2)} \propto \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{v_H} dv e^{i\omega'v + i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-\frac{v-v_H}{CD})} \quad (4.2.40)$$

$$\beta_{(\omega lm)(\omega' lm)}^{(2)} \propto \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{v_H} dv e^{-i\omega'v + i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-\frac{v-v_H}{CD})} \quad (4.2.41)$$

$\alpha_{(\omega lm)(\omega' lm)}^{(2)}$ の積分は ω' に無限小の虚部を与えることで

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{v_H} dv e^{i\omega'v + i\frac{\omega}{\kappa} \ln(-\frac{v-v_H}{CD})} \\ &= (CD)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} e^{i\omega'v_H} \int_0^{\infty} dx e^{-i\omega'x} x^{\frac{i\omega}{\kappa}} \quad (x \equiv -(v-v_H)) \\ &= -\frac{i}{\omega'} (CD)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} e^{i\omega'v_H} (i\omega')^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \Gamma(1 + \frac{i\omega}{\kappa}) \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

となる. また $\beta_{(\omega lm)(\omega' lm)}^{(2)}$ に関しては

$$(-i\omega')^{-\frac{i\omega}{\kappa}} = e^{i\pi \frac{i\omega}{\kappa}} (i\omega')^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \quad (4.2.43)$$

を用いることで

$$\alpha_{(\omega lm)(\omega' lm)}^{(2)} \propto -\frac{i}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} (CD)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} e^{i\omega'v_H} (i\omega')^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \Gamma(1 + \frac{i\omega}{\kappa}) \quad (4.2.44)$$

$$\beta_{(\omega lm)(\omega' lm)}^{(2)} \propto \frac{ie^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} (CD)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} e^{-i\omega'v_H} (i\omega')^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \Gamma(1 - \frac{i\omega}{\kappa}) \quad (4.2.45)$$

と求まる. これから関係式

$$|\alpha_{(\omega lm)(\omega' lm)}^{(2)}| = e^{\frac{\pi\omega}{\kappa}} |\beta_{(\omega lm)(\omega' lm)}^{(2)}| \quad (4.2.46)$$

を満たすことがわかる. これを用いると,

$$\sum_J (|\alpha_{IJ}^{(2)}|^2 - |\beta_{IJ}^{(2)}|^2) = (e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1) \sum_J |\beta_{IJ}^{(2)}|^2 \quad (4.2.47)$$

となり, (4.2.29) で与えられる \mathcal{S}^+ に向かうモード I の粒子数の期待値は

$$\sum_J |\beta_{IJ}^{(2)}|^2 = \frac{\Gamma_I}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \quad (4.2.48)$$

という分布になる. ここで

$$\Gamma_I \equiv \sum_J (|\alpha_{IJ}^{(2)}|^2 - |\beta_{IJ}^{(2)}|^2) \quad (4.2.49)$$

は灰体因子と呼ばれ, モード I の粒子がどれほどブラックホールに吸収されるかを表している. これは ω の $0 \sim \infty$ の積分を含み一般には発散する量であるが, ω まわりの波束を考え単位時間当たりの量にすれば有限量となる.

灰体因子を除けばこれは温度 $T_H = \frac{\hbar c}{2\pi k_B GM}$ の Planck 分布であり、温度 T_H は Hawking 温度と呼ばれる。

Hawking 温度は天文学的なブラックホールに対しては

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM} \approx 6 \times 10^{-8} \frac{M_\odot}{M} [K] \quad (4.2.50)$$

程であり、これは宇宙背景放射の温度 $2.7K$ よりはるかに小さい。

また $\frac{dE}{dT} = -(1/8\pi T_H^2) < 0$ より、ブラックホールの比熱は負である。

以上の議論はブラックホールが電荷や角運動量を持つ場合にも一般化でき、電荷 Q 、角運動量 J をもつ Kerr-Newman ブラックホールの場合

$$T_H = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{M^2 - \bar{Q}^2 - a^2}}{(M + \sqrt{M^2 - \bar{Q}^2 - a^2})^2} \quad \left(a \equiv \frac{J}{M}, \bar{Q} \equiv \frac{Q}{4\pi} \right) \quad (4.2.51)$$

となる。

4.3 情報喪失問題

4.3.1 ブラックホールの蒸発過程

単位時間あたりにブラックホールから放出されるエネルギーフラックスは、

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{l,m} \int_0^\infty \frac{\omega}{2\pi} \frac{\Gamma_{(\omega lm)}}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (\beta \equiv \frac{1}{T_H}) \quad (4.3.52)$$

で与えられる。ただしここでのエネルギーは ADM エネルギー*7だと仮定すると、Schwarzschild 解の場合は質量である。具体的に灰体因子を求めるには (4.2.17) を解かなければならないが、解析的には解けない*8。そこで $\omega \leq \frac{1}{r_S}$ の低振動数で

$$\Gamma_{(\omega 00)} \sim \frac{A\omega^2}{\pi} = 4(\omega r_S)^2 \quad (r_S \equiv 2GM) \quad (4.3.53)$$

と近似されることを使う。 $A \equiv 4\pi r_S^2$ は地平面の表面積を表す。また、 $l > 0$ モードの Γ は (ωr_S) のさらに高次の項に比例するため、(4.3.52) の和で強く効くのは $l = 0$ モードだけで、

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &\sim \int_0^\infty \frac{A}{2\pi^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} d\omega \\ &= \frac{A}{2\pi^2 \beta^4} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1} d\omega = \frac{A}{2\pi^2 \beta^4} \Gamma(4)\zeta(4) \\ &= \frac{\pi^2}{30} AT_H^4 \end{aligned} \quad (4.3.54)$$

*7 ADM エネルギーについては付録 E を参照

*8 数値的な解は [2] で得られている。

- 第 0 法則：表面重力 κ ，角速度 Ω_H ，電位 Φ_H は事象の地平面上では一定である。
- 第 1 法則：定常ブラックホールがほかの定常ブラックホールに変化する際のエネルギーの変化 δM ，全角運動量の変化 δJ ，全電荷の変化 δQ は次式

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \quad (4.3.60)$$

を満たす。

- 第 2 法則：古典的な過程では事象の地平面の面積 A は減少しない。
- 第 3 法則：有限解の物理的試行で表面重力 κ を 0 にすることはできない。

ここでは最も一般的な Einstein-Maxwell 方程式の定常解である Kerr-Newman 解

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (4.3.61)$$

$$A_\mu dx^\mu = - \frac{\bar{Q} r}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi) \quad (\bar{Q} \equiv \frac{Q}{4\pi}) \quad (4.3.62)$$

$$a \equiv \frac{J}{M}, \quad \Delta \equiv r^2 - 2GM r + a^2 + G\bar{Q}^2, \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (4.3.63)$$

について第 0 法則および第 1 法則を確認しておく。

Kerr-Newman 解の事象の地平面は $r = r_+ \equiv GM + \sqrt{(GM)^2 - a^2 - \bar{Q}^2}$ 面にある。

まず第 0 法則についての種々の用語を定義しておく。

Lorentz 多様体 \mathcal{M} の Killing ベクトル場 ξ がある光的超曲面 \mathcal{H} 上でその法ベクトルになっているとき， \mathcal{H} を ξ の Killing ホライズンという。このとき ξ は \mathcal{H} 上では光的ベクトルであるが，それ以外の領域では光的でなくてもよい。定常なブラックホールの未来の事象の地平面は Killing ホライズンである。光的超曲面の法ベクトルは接ベクトルでもあり，必ず光的測地線を生成するため，Killing ベクトル場 ξ^μ は \mathcal{H} 上で光的測地線を生成し，次の測地線方程式が成立する。

$$\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = \kappa \xi^\mu \quad (4.3.64)$$

右辺の \mathcal{H} 上の関数 κ をホライズン \mathcal{H} の表面重力と呼ぶ。 κ の値は ξ の規格化によるが，無限遠方で $\xi^2 \rightarrow -1$ となるように規格化することにする。

κ を求めるには Frobenius の定理と Killing 方程式から従う

$$\kappa^2 = - \frac{1}{2} (\nabla^\mu \xi^\nu) (\nabla_\mu \xi_\nu) \Big|_{\mathcal{H}} \quad (4.3.65)$$

を使うと便利である。例えば Schwarzschild 時空の場合，時間的 Killing ベクトル場 $\xi = \partial_t$ は $r = 2GM$ で光的になるので Killing ホライズンは $r = 2GM$ 超曲面である。表面重力は

$$\kappa = \sqrt{g^{rr}} \partial_r \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \Big|_{r=2GM} = \frac{1}{4GM} \quad (4.3.66)$$

と求まる。

次に電位 Φ_H を定義する。 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を Maxwell 方程式

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad \partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0 \quad (4.3.67)$$

の定常解とする。すなわち、Killing ホライズン \mathcal{H}^+ の外部領域で \mathcal{H}^+ を生成する時間的 Killing ベクトル場 ξ^μ に対し

$$\mathcal{L}_\xi A_\mu = \xi^\nu \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \xi^\nu A_\nu = 0 \quad (4.3.68)$$

が成り立っている。このとき電場ベクトル $E_\mu \equiv F_{\mu\nu} \xi^\nu$ は、スカラー場 $\Phi \equiv -A_\mu \xi^\mu$ を用いて $E_\mu = -\partial_\mu \Phi$ と書ける。 A_μ を無限遠方で 0 になるように選ぶと Φ も無限遠方で 0 になる。このように選んだ時の Φ の \mathcal{H}^+ での値 $\Phi(\mathcal{H}^+)$ をブラックホールの電位 Φ_H と定義する。

さらに角速度 Ω_H を定義する。Kerr-Newman 解は時間発展を生成する Killing ベクトル場 $t = t^\mu \partial_\mu$ と、軸回転を生成する Killing ベクトル場 $m = m^\mu \partial_\mu$ を持ち、時空の等長変換群は t と m の線形結合で表される

$$\xi^\mu = t^\mu + \Omega_H m^\mu \quad (4.3.69)$$

このときの定数係数 Ω_H をブラックホールの角速度と定義する。角速度のホライズン上での値は、 t と m がホライズンの接ベクトルで ξ がホライズンの法ベクトルであることから (4.3.69) を t_μ または m_μ と縮約し、ホライズン上で評価することで

$$\Omega_H|_{\mathcal{H}^+} = -\frac{t^\mu t_\mu}{t^\mu m_\mu} \Big|_{\mathcal{H}^+} = -\frac{t^\mu m_\mu}{m^\mu m_\mu} \Big|_{\mathcal{H}^+} \quad (4.3.70)$$

のように求められる。

上記の量を Kerr-Newman 解の場合に計算すると、

$$\Omega_H = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{t\varphi}} \Big|_{r=r_+} = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (4.3.71)$$

$$\Phi_H = -A_\mu \xi^\mu \Big|_{r=r_+} = -(A_t + \Omega_H A_\varphi) = \frac{r_+ \bar{Q}}{r_+^2 + a^2} \quad (4.3.72)$$

$$\kappa = \frac{r_+ - GM}{r_+^2 + a^2} \quad (4.3.73)$$

とすべて定数になり、第 0 法則が確認できる。

次に第 1 法則について確認する。

Kerr-Newman 解の事象の地平面の面積は、 $r = r_+$ かつ $t = \text{一定}$ 超曲面上の誘導計量が

$$q_{ab} dx^a dx^b = \Sigma \left(d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (4.3.74)$$

を用いて

$$A = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\det(q_{ab})} = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (4.3.75)$$

と計算される。これは表面重力 (4.3.73) を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\kappa}{4\pi}A &= r_+ - GM = GM + (r_+ - 2GM)\frac{2GMr_+ - G\bar{Q}^2}{r_+^2 + a^2} \\ &= GM - \frac{2GMa^2 + r_+G\bar{Q}^2}{r_+^2 + a^2}\end{aligned}\quad (4.3.76)$$

とも書ける。これと (4.3.71), (4.3.72) および $a = J/M$ を用いると次の式を得る

$$M = 2\frac{\kappa}{2\pi} \frac{A}{4G} + 2\Omega_H J + \Phi_H \bar{Q}\quad (4.3.77)$$

これを Smarr の公式という。

面積 A を M, J, \bar{Q} の関数とみなし変分をとる。

$$\delta r_+ = \delta GM + \frac{GM\delta(GM) - a\delta a - G\bar{Q}\delta\bar{Q}}{r_+ - GM}\quad (4.3.78)$$

$$\delta a = \delta(J/M) = \frac{1}{M}\delta J - \frac{a}{M}\delta M\quad (4.3.79)$$

を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\delta A}{8\pi} &= r_+\delta r_+ + a\delta a \\ &= \frac{r^2 + a^2}{r_+ - GM} \left[\delta(GM) - \frac{Ga}{r^2 + a^2}\delta J - \frac{Gr_+\bar{Q}}{r^2 + a^2}\delta\bar{Q} \right]\end{aligned}\quad (4.3.80)$$

すなわち

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \Omega_H\delta J + \Phi_H\delta\bar{Q}\quad (4.3.81)$$

となり第 1 法則が成り立つ。^{*10}

ブラックホールが温度とエネルギーを有するとすると、熱力学的エントロピーが定義できる。

統計力学における熱力学的エントロピーは

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}\quad (4.3.82)$$

で定義される。

Schwarzschild ブラックホールは温度 $T = \frac{1}{8\pi GM}$ を持ち、エネルギー E は ADM エネルギーだとすると、Schwarzschild ブラックホールの場合は質量 M そのものである。

$S(E=0) = 0$ とすると、

$$S = \frac{A}{4G} = 2\pi \frac{A}{l_p^2}\quad (4.3.83)$$

^{*10}一般的な第 1 法則の証明は [16], 第 0 法則, 2 法則の証明は [17] 等を参照。第 3 法則についてはまだ一般的な証明はない。

ここで $l_p \equiv \sqrt{8\pi G}$ は Planck 長である. (4.3.83) は Bekenstein-Hawking エントロピーと呼ばれ, 以後 S_{BH} と書く. Bekenstein-Hawking エントロピーを用いると第 1 法則は

$$\delta M = T_H \delta S_{BH} + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \quad (4.3.84)$$

となる.

ブラックホール第 2 法則から古典的には A は増加しないため, S_{BH} は減少することはない. しかし量子的な効果である Hawking 輻射を考慮すると, ブラックホールはエネルギーを失い小さくなるので S_{BH} は減少する.

ただ Hawking 輻射自体もエントロピー $S_{radiation}$ を持ち, これらを合わせた合計のエントロピー $S = S_{radiation} + S_{BH}$ は減少しない. これは Bekenstein により提唱された [28] 物理過程において, ブラックホールと物質の合計エントロピー

$$S = S_{matter} + S_{BH} \quad (4.3.85)$$

は減少しないという一般化された第 2 法則の特別な例である. ただし一般的な証明があるわけではない.

通常の統計物理学のエントロピーは系の取り得る微視的状态の数を W として

$$S = k_B \ln W \quad (4.3.86)$$

で定義されるが, Bekenstein-Hawking エントロピーがブラックホールの微視的状态の数を表しているかは不明であり, 量子重力理論から Bekenstein-Hawking エントロピーが導けるかは量子重力理論が完成していない現在未解決問題の一つである. (弦理論において極限 Reissner-Nordstrom ブラックホールの場合にはこれらが一致することが示されている [23].)

4.3.3 情報損失問題

Hawking 輻射は真空が非自明な Bogoliubov 変換でつながることによって起こる量子的な効果である.

ここで, 物質が重力崩壊によりブラックホールになり, Hawking 輻射を出しながら最終的に完全に蒸発するという場合を考える.

この場合もし重力崩壊を起こす物質が純粋状態にあったとしても, 蒸発後の終状態は熱的輻射のみが存在する混合状態である. 量子力学ではユニタリーな時間発展で純粋状態から混合状態に発展することはない, すなわちこれは量子力学のユニタリー性に反する過程である.

2.3 節で述べたように, 一般に混合状態にある量子系は別のある補助量子系が存在して, それらを合わせた合成系が純粋状態にできる. 完全蒸発後に輻射と量子的にエンタングルし, 全体を純粋化する補助系が存在しないことは, 純粋状態に蓄えられていた量子情報が一部が世界から欠落することになる. そのためこのユニタリー性が破れる可能性は情報損失問題と呼ばれており, Hawking 自身によって指摘された. [18].

Hawking 輻射の導出では重力の効果は古典的な曲がった空間として扱っているため、量子重力の効果は反映されていない半古典的なものである。

そのため量子重力の効果効きはじめの蒸発の最終過程では既存の量子力学が成り立たず、ユニタリー性が破れている可能性もあるが、近年の超弦理論の発展、特に AdS/CFT 対応により、ブラックホールからの輻射に事象の地平面内部の情報がすべて含まれることが示唆されたため、ユニタリー性を保った蒸発シナリオが活発に議論されている [19][20]。ユニタリー性が保たれるためには、Hawking 輻射と量子的にエンタングルし純粋化する純粋化パートナーが必要である。この純粋化パートナーに関してはこれまでも候補がいくつか挙げられている [12][29] が、次章では動的鏡模型と呼ばれる模型を用いてこの純粋化パートナーについて議論する。

4.4 Page 曲線

ここでは Hawking 輻射とその量子エンタングルメントの時間依存性に関して、D. Page により提唱された Page 曲線を紹介する [10]。

ある時刻において、Hawking 輻射の Hilbert 空間をその時刻より前に輻射された部分と、その後輻射される部分に分ける：

$$\mathcal{H}_{\text{Hawking}} = \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_{BH} \quad (4.4.87)$$

\mathcal{H}_R が既に輻射された Hawking 輻射の Hilbert 空間で、 \mathcal{H}_{BH} がこれから輻射される Hawking 輻射の Hilbert 空間を表す。

この R 系と BH 系との間の量子エンタングルメントエントロピー $S_R (= S_{BH})$ の時間依存性について述べる。

ブラックホールの蒸発過程は複雑であるが、ここでは R と BH を合わせた純粋状態が $\mathcal{H}_{\text{Hawking}}$ からランダムに選ばれたものと仮定する。

Hawking 輻射の主な寄与は $l = 0$ のモードなので、エネルギーフラックスは Stefan-Boltzman の法則 (4.3.56) に従い、輻射の統計力学的なエントロピー S_R^{th} は

$$\frac{dS_R^{th}}{dt} = \frac{dS_R^{th}}{dE} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{T_H} \frac{\pi^2}{30} AT_H^4 = \frac{\pi}{120} T_H \quad (4.4.88)$$

より、

$$\begin{aligned} S_R^{th} &= 4\pi M_0^2 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{2560\pi M_0^3} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \\ &= 4\pi M_0^2 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{t_{evap}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \end{aligned} \quad (4.4.89)$$

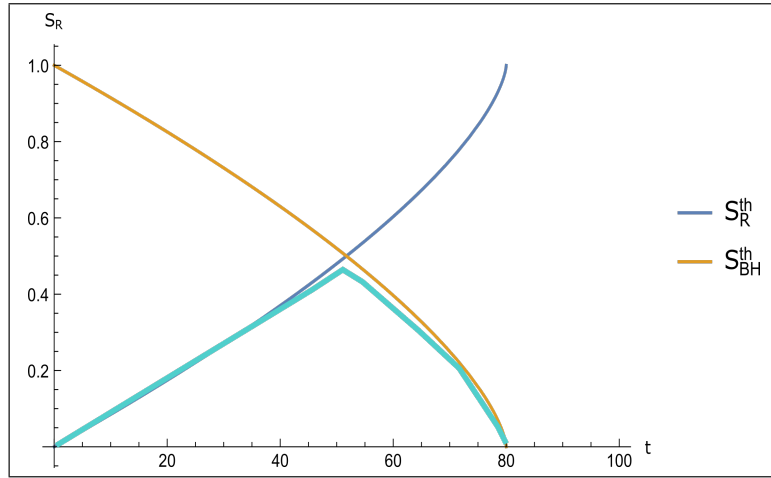


図5 Page 曲線 ($t_{evap} = 80$)

である．一方ブラックホールの統計力学的なエントロピーを Bekenstein-Hawking エントロピーだとすると，

$$\begin{aligned}
 S_{BH}^{th} &= \frac{A}{4} = 4\pi M_0^2 \left(1 - \frac{t}{2560\pi M_0^3}\right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 4\pi M_0^2 \left(1 - \frac{t}{t_{evap}}\right)^{\frac{2}{3}}
 \end{aligned} \tag{4.4.90}$$

したがって $t \ll M_0^3$ のとき， $S_R^{th} \ll S_{BH}^{th}$ である．よって Page の定理から

$$S_R \sim S_R^{th} \quad (t \ll M_0^3) \tag{4.4.91}$$

となる．

しばらく経って， $S_R^{th} \sim S_{BH}^{th}$ となる時間 t_{Page} は，

$$t_{Page} = 0.37t_{evap} \tag{4.4.92}$$

であり，この時間を Page time と呼ぶ^{*11}．Page time 以降は， S_R^{th} が S_{BH}^{th} より大きくなり始めるので，先程とは逆に Page の定理を適用して，

$$S_R = S_{BH} \sim S_{BH}^{th} \quad (t \gg M_0^3) \tag{4.4.93}$$

となる．このようにして求めた S_R の t 依存性を表した曲線 (図5) は Page 曲線と呼ばれる．

^{*11}[9] では $l > 0$ のモードやスピンのある粒子の寄与まで含めた詳細な計算がなされ， $t_{Page} = 0.5381t_{evap}$ を得ている

5 動的鏡模型

5.1 Hawking 輻射を模した動的鏡模型

前節の球対称な星の重力崩壊過程におけるブラックホール形成と Hawking 輻射生成は以下述べるような (1 + 1) 次元 Minkowski 時空における動的鏡模型で記述することができる [12].

まず 4 次元の平坦な時空

$$ds^2 = -d\tau^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.1.1)$$

上での質量 0 スカラー場の球対称解 $\Phi(\tau, r)$ は Klein-Gordon 方程式

$$\left(\partial_\tau^2 - \frac{1}{r^2} (r^2 \partial_r) \right) \Phi(\tau, r) = 0 \quad (5.1.2)$$

を満たす. $\Phi(\tau, r) = \frac{\phi(\tau, r)}{r}$ と再定義すると, (5.1.2) は

$$(\partial_\tau^2 - \partial_r^2) \phi(\tau, r) = 0 \quad (5.1.3)$$

と平坦な 2 次元時空の質量 0 スカラー場の運動方程式になる. ただし原点 $r = 0$ で $\Phi(\tau, r)$ が発散しないために境界条件

$$\phi(\tau, 0) = 0 \quad (5.1.4)$$

が課される.

前節で考えた重力崩壊過程の時空を記述する座標系で原点 $r = 0$ の軌跡は $v = U(u)$ であり, 平坦な 2 次元時空でこの軌跡上に場を完全反射する鏡が存在する状況を考える. 平坦な 2 次元時空

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 \quad (5.1.5)$$

は光円錐座標

$$u = t - x, \quad v = t + x \quad (5.1.6)$$

を導入すると,

$$ds^2 = -du dv \quad (5.1.7)$$

となり, 質量 0 スカラー場 $\phi(u, v)$ の満たす Klein-Gordon 方程式は

$$\partial_u \partial_v \phi = 0 \quad (5.1.8)$$

と書いて, 一般解は,

$$\phi(u, v) = \phi_{in}(v) + \phi_{out}(u) \quad (5.1.9)$$

である.

以下一般に鏡の軌跡を $v = p(u)$ で表し, 軌跡上で境界条件

$$\phi(u, p(u)) = 0, \quad \phi(q(v), v) = 0 \quad (5.1.10)$$

を課す。このとき入射波と反射波は独立ではなく、

$$\phi_{out}(u) = -\phi_{in}(p(u)), \phi_{in}(v) = -\phi_{out}(q(v)) \quad (5.1.11)$$

の関係がある。ここで $q(v)$ は $p(u)$ の逆関数で、 $-\infty < v < v_H$ で存在する場合を考える。鏡の右側の領域のみを考えると、光的無限遠は過去側 \mathcal{S}_R^- ($u = -\infty$) と、未来側 \mathcal{S}_R^+ ($v = \infty$) \cup $\mathcal{S}_{L,>}^+$ ($u = \infty, v_H < v < \infty$) が存在する。

Klein-Gordon 内積は、Cauchy 面として \mathcal{S}_R^- をとると

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = i \int_{-\infty}^{\infty} dv \phi_1^* \overleftrightarrow{\partial}_v \phi_2 \quad (5.1.12)$$

$\mathcal{S}_R^+ \cup \mathcal{S}_{L,>}^+$ をとると

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = i \int_{-\infty}^{\infty} du \phi_1^* \overleftrightarrow{\partial}_u \phi_2 + i \int_{v_H}^{\infty} dv \phi_1^* \overleftrightarrow{\partial}_v \phi_2 \quad (5.1.13)$$

となる。今

$$f_{\omega}^{in} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} [e^{-i\omega v} - e^{-i\omega p(u)}] \quad (5.1.14)$$

は内積 (5.1.12) のもとで規格化され正エネルギー解の完全系をなす。一方 (5.1.13) に対しては、 \mathcal{S}_R^+ で規格化されるモード関数

$$f_{\omega}^{out} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} [e^{-i\omega u} - e^{-i\omega q(v)} \Theta(v_H - v)] \quad (5.1.15)$$

と、 $\mathcal{S}_{L,>}^+$ 上で規格化されるモード関数 f_{ω}^{left} で正エネルギー解の完全系を構成する。よって場 $\hat{\phi}(u, v)$ はこれらの完全系を用いて

$$\hat{\phi}(u, v) = \int_0^{\infty} d\omega [\hat{a}_{\omega} f_{\omega}^{in} + \hat{a}_{\omega}^{\dagger} f_{\omega}^{in*}] \quad (5.1.16)$$

$$= \int_0^{\infty} d\omega [\hat{b}_{\omega} f_{\omega}^{out} + \hat{b}_{\omega}^{\dagger} f_{\omega}^{out*} + \hat{c}_{\omega} f_{\omega}^{left} + \hat{c}_{\omega}^{\dagger} f_{\omega}^{left*}] \quad (5.1.17)$$

と量子化される。境界条件 (5.1.11) より入射波、反射波は

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{in}(v) &\equiv \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} [\hat{a}_{\omega} e^{-i\omega v} + \hat{a}_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega v}] \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} [-\Theta(v_H - v) (\hat{b}_{\omega} e^{-i\omega q(v)} + \hat{b}_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega q(v)}) + \hat{c}_{\omega} f_{\omega}^{left} + \hat{c}_{\omega}^{\dagger} f_{\omega}^{left*}] \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

$$\hat{\phi}_{out}(u) \equiv \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} [\hat{b}_{\omega} e^{-i\omega u} + \hat{b}_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega u}] \quad (5.1.19)$$

$$= - \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} [\hat{a}_{\omega} e^{-i\omega p(u)} + \hat{a}_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega p(u)}] \quad (5.1.20)$$

のように定義できる。ここで生成消滅演算子は、

$$[\hat{a}_{\omega}, \hat{a}_{\omega'}^{\dagger}] = \delta(\omega - \omega'), [\hat{b}_{\omega}, \hat{b}_{\omega'}^{\dagger}] = \delta(\omega - \omega'), [\hat{c}_{\omega}, \hat{c}_{\omega'}^{\dagger}] = \delta(\omega - \omega') \quad (5.1.21)$$

を満たす.

各領域 \mathcal{S}_R^- , \mathcal{S}_R^+ , $\mathcal{S}_{L,>}^+$ の真空をそれぞれ $|0_{in}\rangle$, $|0_{out}\rangle$, $|0_{left}\rangle$ とすると

$$\forall \omega \quad \hat{a}_\omega |0_{in}\rangle = 0, \hat{b}_\omega |0_{out}\rangle = 0, \hat{c}_\omega |0_{left}\rangle = 0 \quad (5.1.22)$$

で定義される.

モード関数同士は Bogoliubov 変換

$$f_\omega^{out} = \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'}^{in} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^{in*}] \quad (5.1.23)$$

で繋がり, Bogoliubov 係数は

$$\alpha_{\omega\omega'} = \langle f_\omega^{out}, f_{\omega'}^{in} \rangle, \beta_{\omega\omega'} = - \langle f_\omega^{out}, f_{\omega'}^{in*} \rangle \quad (5.1.24)$$

で計算できる.

\mathcal{S}_R^+ で観測される振動数 ω の粒子数の期待値は

$$\langle 0_{in} | \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega | 0_{in} \rangle = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2 \quad (5.1.25)$$

である.

具体的な鏡の軌跡として, (4.1.14) を用いた

$$p(u) = v_H - \frac{1}{\kappa} W(e^{-\kappa(u-v_H)}) \quad (5.1.26)$$

$$q(v) = v - \frac{1}{\kappa} \ln[\kappa(v_H - v)] \quad (5.1.27)$$

を採用する.

Cauchy 面として \mathcal{S}_R^- をとると,

$$\begin{aligned} \beta_{\omega\omega'} &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int_{-\infty}^{v_H} dv e^{i\omega'v + i\omega q(v)} \left(\omega \frac{dq(v)}{dv} - \omega' \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{v_H} dv e^{i(\omega+\omega')v} [\kappa(v_H - v)]^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \left(\sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \left[1 + \frac{1}{\kappa(v_H - v)} \right] - \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \right) \\ &= \frac{ie^{i(\omega+\omega')v_H}}{2\pi} e^{-\frac{\pi\omega}{2\kappa}} \frac{1}{\omega + \omega'} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \left(\frac{\omega + \omega'}{\kappa} \right)^{\frac{i\omega}{\kappa}} \Gamma \left[1 - \frac{i\omega}{\kappa} \right] \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

$$|\beta_{\omega\omega'}|^2 = \frac{\omega'}{2\pi\kappa(\omega + \omega')^2} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \quad (5.1.29)$$

と計算できて $\omega' \gg \omega$ の範囲で

$$|\beta_{\omega\omega'}|^2 \sim \frac{1}{2\pi\kappa\omega'} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \quad (5.1.30)$$

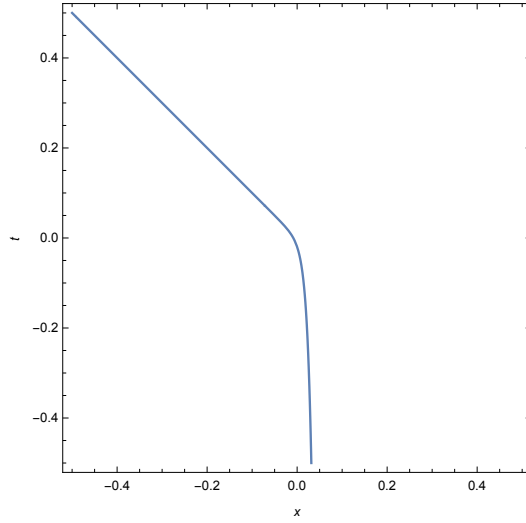


図6 軌跡 (4.1.14) ($v_H = 0, \kappa = 50$)

となり, Planck 分布の輻射が観測されることがわかる. さらに演算子として

$$\hat{\Pi}_{in}(v) = \partial_v \hat{\phi}_{in}(v) = -i \int_0^\infty \sqrt{\frac{\omega}{4\pi}} d\omega [\hat{a}_\omega e^{-i\omega v} - \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega v}] \quad (5.1.31)$$

$$\hat{\Pi}_{out}(u) = \partial_u \hat{\phi}_{out}(u) = -i \int_0^\infty \sqrt{\frac{\omega}{4\pi}} d\omega [\hat{b}_\omega e^{-i\omega v} - \hat{b}_\omega^\dagger e^{i\omega v}] \quad (5.1.32)$$

$$= i \partial_u p(u) \int_0^\infty \sqrt{\frac{\omega}{4\pi}} d\omega [\hat{a}_\omega e^{-i\omega p(u)} - \hat{a}_\omega^\dagger e^{i\omega p(u)}] \quad (5.1.33)$$

を導入する。各交換関係は

$$\begin{aligned}
[\hat{\phi}_{in}(v), \hat{\phi}_{in}(v')] &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{4\pi\omega} [e^{-i\omega(v-v')} - e^{i\omega(v-v')}] \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{4\pi\omega} e^{-i\omega(v-v')} \\
&= -\frac{i}{4} \text{sgn}(v-v')
\end{aligned} \tag{5.1.34}$$

$$[\hat{\phi}_{out}(u), \hat{\phi}_{out}(u')] = -\frac{i}{4} \text{sgn}(u-u') \tag{5.1.35}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{\Pi}_{in}(v), \hat{\Pi}_{in}(v')] &= \int_0^\infty \frac{\omega}{4\pi} d\omega [e^{-i\omega(v-v')} - e^{i\omega(v-v')}] \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega}{4\pi} d\omega e^{-i\omega(v-v')} \\
&= \frac{i}{4\pi} \partial_v \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega(v-v')} d\omega \\
&= \frac{i}{2} \partial_v \delta(v-v')
\end{aligned} \tag{5.1.36}$$

$$[\hat{\Pi}_{out}(u), \hat{\Pi}_{out}(u')] = \frac{i}{2} \partial_u \delta(u-u') \tag{5.1.37}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{\phi}_{in}(v), \hat{\Pi}_{in}(v')] &= i \int_0^\infty \frac{d\omega}{4\pi} [e^{-i\omega(v-v')} + e^{i\omega(v-v')}] \\
&= i \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{4\pi} e^{-i\omega(v-v')} \\
&= \frac{i}{2} \delta(v-v')
\end{aligned} \tag{5.1.38}$$

$$[\hat{\phi}_{out}(u), \hat{\Pi}_{out}(u')] = \frac{i}{2} \delta(u-u') \tag{5.1.39}$$

のようになる。ここで $\text{sgn}(x)$ は符号関数である。

2点関数は、

$$\begin{aligned}
\langle 0_{in} | \hat{\Pi}_{in}(v) \hat{\Pi}_{in}(v') | 0_{in} \rangle &= \int_0^\infty \frac{\omega}{4\pi} e^{-i\omega(v-v')} d\omega \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{(v-v'-i\epsilon)^2}
\end{aligned} \tag{5.1.40}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0_{in} | \hat{\Pi}_{out}(u) \hat{\Pi}_{out}(u') | 0_{in} \rangle &= \int_0^\infty \frac{\omega}{4\pi} e^{-i\omega(p(u)-p(u'))} \partial_u p(u) \partial_{u'} p(u') d\omega \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial_u p(u) \partial_{u'} p(u')}{(p(u)-p(u')-i\epsilon)^2}
\end{aligned} \tag{5.1.41}$$

のように計算される。

反射波のエネルギー運動量テンソル $\hat{T}_{uu}(u) = (\partial_u \hat{\phi}_{out}(u))^2$ の期待値は、真空の分を差し引いた

$$\langle 0_{in} | \hat{T}_{uu}(u) | 0_{in} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\langle 0_{in} | \partial_u \hat{\phi}_{out}(u+\epsilon) \partial_u \hat{\phi}_{out}(u) | 0_{in} \rangle - \langle 0_{out} | \partial_u \hat{\phi}_{out}(u+\epsilon) \partial_u \hat{\phi}_{out}(u) | 0_{out} \rangle] \tag{5.1.42}$$

で定義する.

$$\begin{aligned}\langle 0_{in} | \partial_u \hat{\phi}_{out}(u_1) \partial_u \hat{\phi}_{out}(u_2) | 0_{in} \rangle &= \langle 0_{in} | \hat{\Pi}_{out}(u_1) \hat{\Pi}_{out}(u_2) | 0_{in} \rangle \\ &= -\frac{\partial_u p(u_1) \partial_u p(u_2)}{4\pi(p(u_1) - p(u_2) - i\epsilon)^2}\end{aligned}\quad (5.1.43)$$

を代入すると

$$\begin{aligned}\langle 0_{in} | \hat{T}_{uu}(u) | 0_{in} \rangle &= -\frac{1}{24\pi} \left[\frac{\partial_u^3 p(u)}{\partial_u p(u)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_u^2 p(u)}{\partial_u p(u)} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\sqrt{p'(u)}}{12\pi} \frac{d^2}{du^2} \sqrt{\frac{1}{p'(u)}} \\ &= -\frac{1}{24\pi} \{p(u), u\}_S\end{aligned}\quad (5.1.44)$$

と書かれることがわかる. 最後の表式に現れた $\{f(x), x\}_S$ は Schwarz 微分と呼ばれ, $\{f(x), x\}_S = 0$ を満たす $f(x)$ は $\frac{ax+b}{cx+d}$ の形のものに限られることが知られている.

ここで軌跡として

$$p(u) = -\frac{1}{\kappa} \ln(e^{-\kappa u} + 1) \quad (5.1.45)$$

$$q(v) = -\frac{1}{\kappa} \ln(e^{-\kappa v} - 1) \quad (-\infty < v < 0) \quad (5.1.46)$$

を考える. この軌跡は無限の過去 ($u \sim -\infty$) で $p(u) \sim u$ で静止し, 十分未来 ($u \sim \infty$) では $p(u) \sim -\frac{1}{\kappa}$ となり, $v = 0$ の光的測地線に漸近する.

反射波のエネルギーフラックスは

$$\langle 0_{in} | \hat{T}_{uu}(u) | 0_{in} \rangle = \frac{\kappa^2}{48\pi} \frac{e^{\kappa u} (2 + e^{\kappa u})}{(1 + e^{\kappa u})^2} \quad (5.1.47)$$

と計算され, $v = 0$ に漸近する $u \gg \frac{1}{\kappa}$ の領域では,

$$\langle 0_{in} | \hat{T}_{uu}(u) | 0_{in} \rangle \sim \frac{\kappa^2}{48\pi} = \frac{\pi}{12} T^2 \quad (T = \frac{\kappa}{2\pi}) \quad (5.1.48)$$

となり, 温度 $T = T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$ のエネルギーフラックスが観測される.

軌跡 (4.1.14) で計算すると,

$$\langle 0_{in} | \hat{T}_{uu}(u) | 0_{in} \rangle = \frac{\kappa^2}{48\pi} \frac{1 + 4W[e^{-\kappa(u-v_H)}]}{(1 + W[e^{-\kappa(u-v_H)}])^4} \quad (5.1.49)$$

となり, $u \gg \frac{1}{\kappa}$ で同じく $\sim \frac{\pi}{12} T^2$ となる. ここで一般に $\frac{dW(z)}{dz} = \frac{W(z)}{z(1+W(z))}$ であることを用いた. このように動的鏡模型では鏡を加速させる軌跡をもちいることで Hawking 輻射を再現することができる.

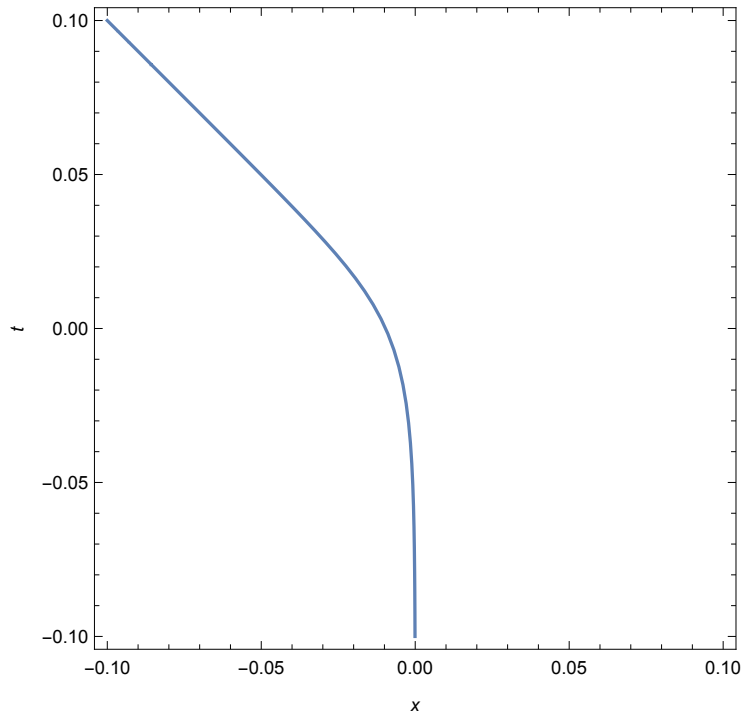


図 7 軌跡 (5.1.45)

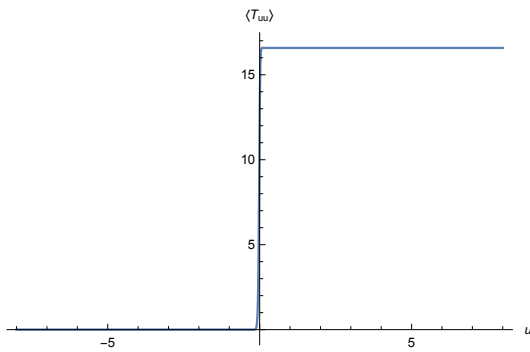


図 8 軌跡 (5.1.45) のエネルギーフラックス ($\kappa = 50$)

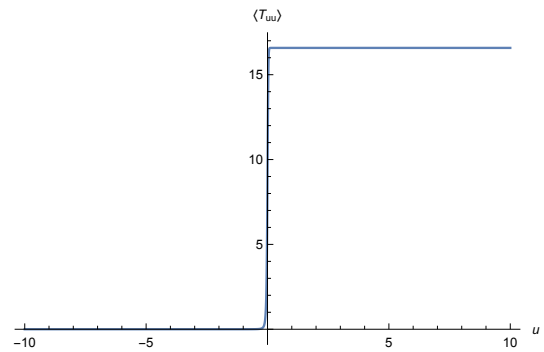


図 9 軌跡 (4.1.14) のエネルギーフラックス ($v_H = 0, \kappa = 50$)

5.2 Hawking 輻射の量子エンタングルメント

Hawking 輻射を模した動的鏡模型により Hawking 輻射の量子エンタングルメントを解析することができる。

鏡の軌道として $-\infty < u < \infty$ で定義される

$$p(u) = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa u} \quad (5.2.50)$$

を考える。このとき逆関数は $-\infty < u < 0$ において存在し、

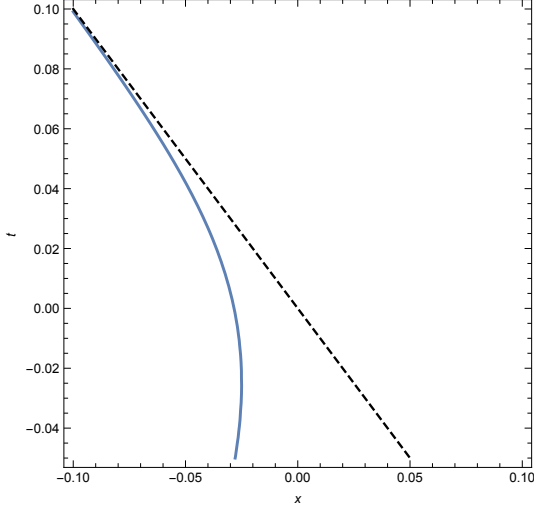


図 10 軌跡 (5.2.50)

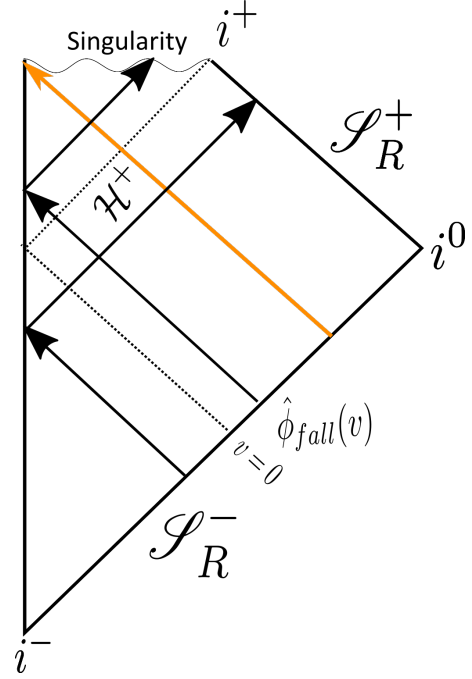


図 11 軌跡 (5.2.50) に対応する重力崩壊の Penrose 図

$$q(v) = -\frac{1}{\kappa} \ln(-\kappa v) \quad (-\infty < v < 0) \quad (5.2.51)$$

(5.1.44) を計算すると,

$$\langle 0_{in} | \hat{T}_{uu}(u) | 0_{in} \rangle = \frac{\pi}{12} T_H^2 \quad (5.2.52)$$

となり, $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$ 一定の Hawking 輻射が放出される様子を記述している.

この軌跡では $v > 0$ の領域の入射波は鏡にあらずそのまま $\mathcal{S}_{L,>}^+$ に到達する. これは地平面にそのまま落下しブラックホールに吸収されてしまう成分に対応し, $v = 0$ がその境界である事象の地平面を模している.

鏡で反射される反射波のモード関数 $\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u}$ は時間を遡ると $\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega q(v)}$ となり, 入射波成分の一部として

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{in}(v) &\supset \Theta(-v) \int_0^\infty \left(\hat{b}_\omega e^{-i\omega q(v)} + \hat{b}^\dagger e^{i\omega q(v)} \right) \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \\ &= \Theta(-v) \int_0^\infty \left(\hat{b}_\omega (-\kappa v)^{\frac{i\omega}{\kappa}} + \hat{b}^\dagger (-\kappa v)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \right) \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \end{aligned} \quad (5.2.53)$$

として量子化できる.

一方で鏡にあたらない $v > 0$ の入射波成分を $\hat{\phi}_{fall}(v)$ とする. (5.2.53) のモード関数が, Unruh 効果の量子エンタングルメントを解析した際に用いたものと同じであることに注目し, $\hat{\phi}_{fall}(v)$ を量子化するためのモード関数として $(\kappa v)^{-\frac{i\omega}{\kappa}}$ を採用し

$$\hat{\phi}_{fall}(v) = \Theta(v) \int_0^\omega \left(\hat{c}_\omega (\kappa v)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} + \hat{c}_\omega^\dagger (\kappa v)^{\frac{i\omega}{\kappa}} \right) \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (5.2.54)$$

と量子化する．ここで $[\hat{b}_\omega, \hat{b}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$, $[\hat{b}_\omega, \hat{b}_{\omega'}] = 0$, $[\hat{c}_\omega, \hat{c}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$, $[\hat{c}_\omega, \hat{c}_{\omega'}] = 0$ である．

入射波全体は

$$\hat{\phi}_{in}(v) = \int_0^\infty \left(\Theta(-v) \left(\hat{b}_\omega(-\kappa v)^{\frac{i\omega}{\kappa}} + \hat{b}_\omega^\dagger(-\kappa v)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} \right) + \Theta(v) \left(\hat{c}_\omega(\kappa v)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} + \hat{c}_\omega^\dagger(\kappa v)^{\frac{i\omega}{\kappa}} \right) \right) \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (5.2.55)$$

と量子化される．このとき，Unruh 効果のときと同様に，入射波の真空 $|0_{in}\rangle$ は

$$\begin{aligned} |0\rangle_{in} &\propto \exp\left(\int_0^\infty e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} \hat{b}_\omega^\dagger \hat{c}_\omega^\dagger d\omega\right) |0\rangle_B |0\rangle_C \\ &= \prod_\omega \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa} n} |n(\omega)\rangle_B |n(\omega)\rangle_C \right) \end{aligned} \quad (5.2.56)$$

となる． $|0\rangle_B$ は $\hat{b}_\omega^\dagger |0\rangle_B = 0$ ($\forall \omega$) で定義される状態で，反射波の真空状態である．一方 $|0\rangle_C$ は $\hat{c}_\omega^\dagger |0\rangle_C = 0$ ($\forall \omega$) で定義される Rindler 真空状態である．

B の縮約状態は

$$\hat{\rho}_B = \text{Tr}_C [|0_{in}\rangle \langle 0_{in}|] \propto \prod_\omega \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{2\pi\omega}{\kappa} n} |n(\omega)\rangle_B \langle n(\omega)|_B \right) \quad (5.2.57)$$

という温度 $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ の Gibbs 状態で与えられ，この B の自由度が Hawking 輻射であることがわかる．(5.2.56) は Hawking 輻射と量子的にエンタングルしているのは，Hawking 輻射となる前 (鏡に当たる前) に既にエンタングルしていた Rindler 粒子 $\hat{\phi}_{fall}(v)$ であるということを表している． C の縮約状態 $\hat{\rho}_C = \text{Tr}_B [|0_{in}\rangle \langle 0_{in}|]$ は局所的真空状態のまま，エネルギーは 0 の零点振動のみが存在しており，Hawking 輻射はこの C の零点振動で純粋化されている．

この軌跡では Hawking 輻射の反作用は取り入れられておらず，蒸発過程は記述できない．蒸発過程を記述するには，鏡がある一定期間加速し Hawking 輻射を放出した後，減速して最終的に静止し輻射を出さなくすればよい．そのような軌跡 $p_{evap}(u)$ は $-\infty < u < \infty$ で単調増加で， $p_{evap}(\pm\infty) = \pm\infty$ を満たす．蒸発過程を記述する軌跡として具体的に

$$p_{evap}(u) = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa u} + \frac{1}{\kappa} \ln(1 + e^{\kappa(u-h)}) \quad (5.2.58)$$

という軌跡を考える．この軌跡は十分過去では Hawking 輻射を放出する軌跡 $p_{evap}(u) \sim -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa u}$ で，十分未来では $p_{evap}(u) \sim u - h$ で鏡は静止している．パラメータ h は鏡がどこで静止し始めるかを決めている．

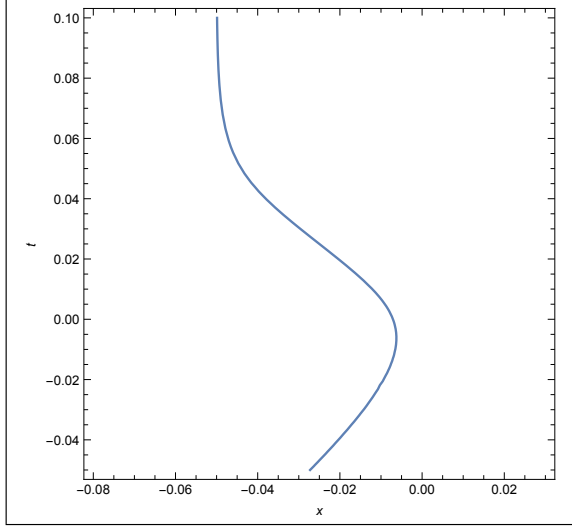


図 12 軌跡 (5.2.58) ($h = 0.1, \kappa = 80$)

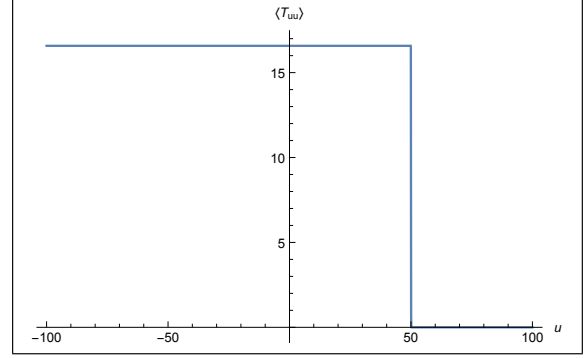


図 13 軌跡 (5.2.58) のエネルギーフラックス ($h = 50, \kappa = 50$)

エネルギーフラックスは (5.1.44) より

$$\begin{aligned}
\langle 0_{in} | \hat{T}_{uu} | 0_{in} \rangle &= \frac{1}{48\pi(e^{\kappa h} + e^{\kappa u})^2(e^{\kappa h} + e^{\kappa u} + e^{2\kappa u})^2} \\
&\times \left(e^{4\kappa h} + e^{4\kappa u} - 2e^{5\kappa u} + 6e^{2\kappa(h+u)} + 4e^{\kappa(3h+u)} + e^{2\kappa(h+2u)} + 4e^{\kappa(h+3u)} - 10e^{\kappa(h+4u)} + 2e^{\kappa(h+5u)} \right. \\
&\quad \left. - 10e^{\kappa(3h+2u)} - 18e^{\kappa(2h+3u)}\kappa^2 \right) \\
&\underset{h \gg \frac{1}{\kappa}}{\sim} \begin{cases} \frac{\kappa^2}{48\pi} & (u < h) \\ 0 & (u \geq h) \end{cases} \tag{5.2.59}
\end{aligned}$$

となり確かに最初 Hawking 輻射を放出したのち静止してフラックスを出さなくなっている。

この軌跡では鏡にあらずに落ちる成分 $\hat{\phi}_{fall}(v)$ は存在せず、入射波 $\hat{\phi}_{in}(v)$ はすべて鏡で散乱されて (5.1.11) に従い反射波 $\hat{\phi}_{out}(u)$ となる。

$v = \infty$ (\mathcal{S}_R^+) の直線は u で座標が張られており、領域 $[u_1, u_2]$ とその外部領域の間の反射波 $\hat{\phi}_{out}(u)$ の量子エンタングルメントエントロピー S は、時間を遡り $u = -\infty$ (\mathcal{S}_R^-) の直線上の領域 $[v_1, v_2] \equiv [p_{evap}(u_1), p_{evap}(u_2)]$ とその外部領域における入射波 $\hat{\phi}_{in}(v)$ の量子エンタングルメントエントロピーとして評価される。

u_1 のカットオフ幅を ϵ_1^- 、 u_2 のカットオフ幅を ϵ_2^- とすれば、 $v = \infty$ 上の領域 $[u_1, u_1 + \epsilon_1^-]$ は $u = -\infty$ 上の幅 $\epsilon_1^+ \equiv \partial_u p_{evap}(u_1)\epsilon_1^-$ の領域 $[v_1, v_1 + \epsilon_1^+]$ に、領域 $[u_2, u_2 + \epsilon_2^-]$ は幅 $\epsilon_2^+ \equiv \partial_u p_{evap}(u_2)\epsilon_2^-$ の領域 $[v_2, v_2 + \epsilon_2^+]$ に引き戻される。3.6 節で議論した量子エンタングルメントエントロピーの公式 (3.6.122) を用いると、入射波の S は

$$S = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{(v_2 - v_1)^2}{\epsilon_1^+ \epsilon_2^+} \right) \tag{5.2.60}$$

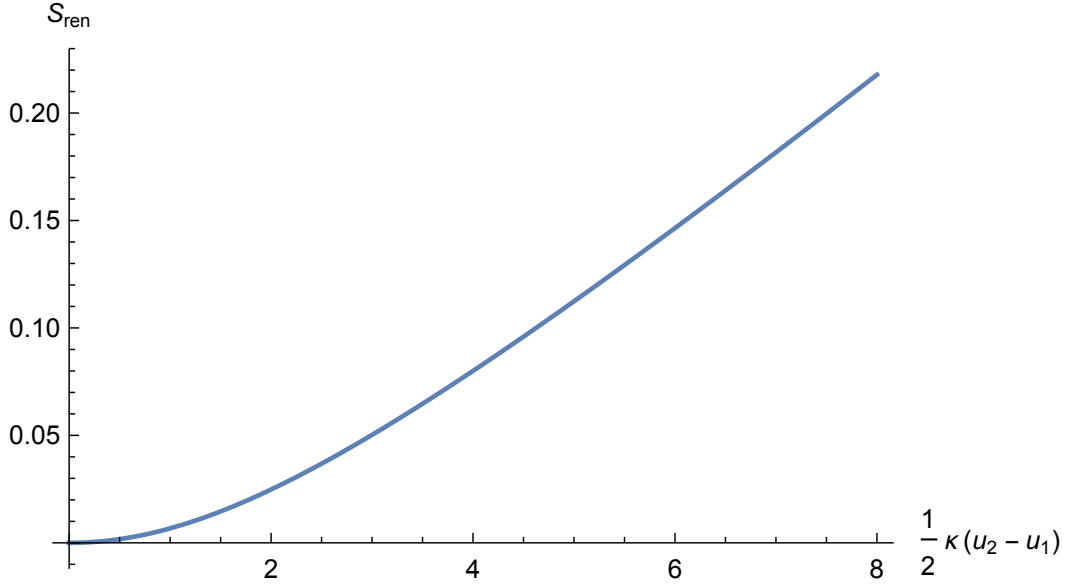


図 14 繰り込まれた量子エンタングルメントエントロピー S_{ren}

で与えられ、反射波の量子エンタングルメントエントロピーは

$$S = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{(p_{evap}(u_1) - p_{evap}(u_2))^2}{\partial_u p_{evap}(u_1) \partial_u p_{evap}(u_2) \epsilon_1^- \epsilon_2^-} \right) \quad (5.2.61)$$

と評価される。この量は $\epsilon = \sqrt{\epsilon_1^- \epsilon_2^-} \rightarrow 0$ で発散してしまうため、真空状態での $S = S_{vac}$ 、すなわち鏡が静止する軌跡 $p(u) = u$ のときの量子エンタングルメントエントロピーを引いた

$$S_{ren} \equiv S - S_{vac} = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{(p_{evap}(u_2) - p_{evap}(u_1))^2}{\partial_u p_{evap}(u_2) \partial_u p(u_1) (u_2 - u_1)^2} \right) \quad (5.2.62)$$

という繰り込まれた量子エンタングルメントエントロピーにより真空状態に比べてどれほどの量子エンタングルメントが存在するかを測る。

領域 $[u_1, u_2]$ が Hawking 輻射を出す領域に含まれる場合、 $p_{evap}(u) \sim -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa u}$ と近似できるので、反射波の繰り込まれた量子エンタングルメントエントロピーは

$$\begin{aligned} S_{ren} &= \frac{1}{12} \ln \left(\frac{4 \sinh^2 \left(\frac{\kappa}{2} (u_2 - u_1) \right)}{\kappa^2 (u_2 - u_1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{24} \ln \left(\frac{\sinh \left(\frac{\kappa}{2} (u_2 - u_1) \right)}{\frac{\kappa}{2} (u_2 - u_1)} \right) \end{aligned} \quad (5.2.63)$$

となり、 $u_2 - u_1 \gg \frac{2}{\kappa} = 8M$ では大量の量子エンタングルメントを外部と共有することがわかる。このパートナーは (5.2.56) で示されたように仮想粒子である Rindler 粒子である。ただし軌跡 (5.2.50) のときと異なるのは、鏡が減速し始めるとこの Rindler 粒子も鏡で反射され反射波とな

る点である。このうち鏡が静止する前に反射された Rindler 粒子はエネルギーを得て輻射となるが、静止した後に反射されたものはエネルギーを持たない零点振動のままである。したがって Hawking 輻射と量子的にエンタングルし純粋化するパートナーは、鏡の減速以降に放出される輻射と、鏡が静止して輻射が生成されなくなった後に出てくる零点振動である。

ただし蒸発の最終段階で Planck スケールほどのブラックホールになった場合には無視している曲率の効果が大きくなると考えられる。それは運動方程式 (4.2.17) に現れる有効ポテンシャル (4.2.18) の項として強く効いてくるため、動的鏡モデルでは実際のブラックホールの蒸発の最終段階を記述することはできないことには注意が必要である。

6 純粋化パートナー

2.8 節でも述べたように、モノガミー性のために純粋状態にある系は他の系との相関をもてない、すなわち量子情報が外部に漏れない系であるから、純粋化パートナーの研究はブラックホールの文脈のみならず、量子暗号や量子コンピューターといった量子工学等の応用分野においても非常に重要である。そこでこの章では [21] に基づき自由スカラー場の場合に純粋化パートナーを求める手法と、その性質について述べる。

6.1 純粋化パートナーの定義

$\hat{\phi}(\mathbf{x})$, $\hat{\Pi}(\mathbf{x})$ をそれぞれ $(d+1)$ 次元時空の自由スカラー場とその共役運動量とする。A 系の正準交換関係 $[\hat{q}_A, \hat{p}_A] = i$ を満たす演算子として

$$\hat{q}_A \equiv \int d^d \mathbf{x} (x_A(\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{x}) + y_A(\mathbf{x}) \hat{\Pi}(\mathbf{x})), \quad \hat{p}_A \equiv \int d^d \mathbf{x} (z_A(\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{x}) + w_A(\mathbf{x}) \hat{\Pi}(\mathbf{x})) \quad (6.1.1)$$

を考える。実関数 $x_A(\mathbf{x}), y_A(\mathbf{x}), z_A(\mathbf{x}), w_A(\mathbf{x})$ を以後重み関数と呼ぶことにする。

この A を純粋化するパートナーモード B を次の条件を満たす演算子 (\hat{q}_B, \hat{p}_B) として定義する：

(i) 正準交換関係：

$$[\hat{q}_B, \hat{p}_B] = i \quad (6.1.2)$$

(ii) 局所性：

$$[\hat{q}_A, \hat{q}_B] = 0, [\hat{q}_A, \hat{p}_B] = 0, [\hat{p}_A, \hat{q}_B] = 0, [\hat{p}_A, \hat{p}_B] = 0 \quad (6.1.3)$$

(iii) 純粋化条件：次で定義される状態 $\hat{\rho}_{AB}$ が純粋状態である。

$$\langle \bar{x}_A, \bar{x}_B | \hat{\rho}_{AB} | x_A, x_B \rangle \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int dv_A dv_B \chi(x_A - \bar{x}_A, v_A, x_B - \bar{x}_B, v_B) e^{-\frac{i}{2}(v_A(\bar{x}_A + x_A) + v_B(\bar{x}_B + x_B))} \quad (6.1.4)$$

ここで $\chi(x_A, v_A, x_B, v_B)$ は系の純粋状態 $|\Psi\rangle$ に対し

$$\chi(x_A, v_A, x_B, v_B) \equiv \langle \Psi | e^{i(v_A \hat{q}_A - x_A \hat{p}_A)} e^{i(v_B \hat{q}_B - x_B \hat{p}_B)} | \Psi \rangle \quad (6.1.5)$$

で定義される特性関数である。

6.2 純粋化パートナーの存在証明

任意の状態において、任意のモード A に対し上記の条件を満たすパートナーモード B が常に存在することは、(1+1) 次元のスカラー場を離散化したモデルとして連結 N 調和振動子系を用いて次のようにして示すことができる。

連結 N 調和振動子系を考え、系の純粋状態を $|\Psi\rangle_{1,\dots,N}$ とする。モード A を n 番目の調和振動子の正準演算子 (\hat{q}_n, \hat{p}_n) の線形結合

$$\hat{q}_A \equiv \sum_{n=1}^N (x_A(n)\hat{q}_n + y_A(n)\hat{p}_n), \quad \hat{p}_A \equiv \sum_{n=1}^N (z_A(n)\hat{q}_n + w_A(n)\hat{p}_n) \quad (6.2.6)$$

で定義する。正準交換関係 $[\hat{q}_A, \hat{p}_A] = i$ より重み関数には

$$\sum_{n=1}^N (x_A(n)w_A(n) - z_A(n)y_A(n)) = 1 \quad (6.2.7)$$

の制約がつく。

Stone-von Neumann の定理 [36] より、あるユニタリ演算子 \hat{V}_N で、 $\hat{V}_N \hat{q}_A \hat{V}_N^\dagger = \hat{q}_1$ 、 $\hat{V}_N \hat{p}_A \hat{V}_N^\dagger = \hat{p}_1$ を満たすものが存在する。この \hat{V}_N によって変換された状態 $|\Psi'\rangle_{1,\dots,N} \equiv \hat{V}_N |\Psi\rangle$ は純粋状態のまま、この状態を次のように Schmidt 分解する。

$$|\Psi'\rangle_{1,\dots,N} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{p_n} |a_n\rangle_1 |\psi_n\rangle_{2,\dots,N} \quad (6.2.8)$$

ここで $\{|a_n\rangle_1 : n = 0, 1, 2, \dots\}$ は

$$\hat{\rho}_1 \equiv \text{Tr}_{2,\dots,N} [|\Psi'\rangle \langle \Psi'|] \quad (6.2.9)$$

で定義されるモードを

$$\hat{\rho}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |a_n\rangle_1 \langle a_n|_1 \quad (6.2.10)$$

のようにスペクトル分解したときの基底である。

ここで次のような生成消滅演算子を定義する

$$\hat{b}^\dagger \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \sum_{i=1}^{N-1} |\psi_{n+1}^{(i)}\rangle_{2,\dots,N} \langle \psi_n^{(i)}|_{2,\dots,N}, \quad \hat{b} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \sum_{i=1}^{N-1} |\psi_n^{(i)}\rangle_{2,\dots,N} \langle \psi_{n+1}^{(i)}|_{2,\dots,N} \quad (6.2.11)$$

ここで $\{|\psi_n^{(i)}\rangle\}$ はモード $2 \sim N$ の部分 Hilbert 空間の正規直交基底で、 $|\psi_n^{(1)}\rangle \equiv |\psi_n\rangle$ 、 $\langle \psi_n^{(i)} | \psi_m^{(j)} \rangle = \delta_{mn} \delta_{ij}$ を満たす。この演算子は $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ を満たすので正準演算子を

$$\hat{q}_B \equiv \hat{V}_N^\dagger \left(\hat{I} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \right) \hat{V}_N, \quad \hat{p}_B \equiv \hat{V}_N^\dagger \left(\hat{I} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}i} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \right) \hat{V}_N \quad (6.2.12)$$

と定義すれば、条件 (i) は満たされる。また条件 (ii) も $\hat{V}_N \hat{q}_B \hat{V}_N^\dagger, \hat{V}_N \hat{p}_B \hat{V}_N^\dagger$ が q_1, p_1 と可換なことから満たされる。条件 (iii) は

$$\langle \Psi | e^{i(v_A \hat{q}_A - x_A \hat{p}_A)} e^{i(v_B \hat{q}_B - x_B \hat{p}_B)} | \Psi \rangle = \langle \Psi' | e^{i(v_A q_1 - x_A p_1)} e^{i(v_B (\hat{I} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)) - x_B (\hat{I} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}i} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger)))} | \Psi' \rangle \quad (6.2.13)$$

と, (q_1, p_1) が $\left(\hat{I} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \hat{I} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}i}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger)\right)$ で純粋化されていることから満たされる.

以上より純粋化パートナーは必ず存在することが証明された. \square

純粋化パートナーは (6.2.12) のようにして構成することができるが, 一意ではない.

まずは $\hat{\rho}_1$ がフルランクでない場合, すなわち p_n の中に 0 のものがある場合は一意でない. 例えば $p_0 = 0$ のとき, $|\psi_0\rangle_{2, \dots, N}$ は $|\psi_n\rangle_{2, \dots, N}$ ($n \geq 1$) に直交する規格化された任意のベクトルをとることができる. $\hat{\rho}_1$ がフルランクの場合でも, $\{|\psi_n^{(i)}\rangle\}_{i=2}^{N-1}$ は $\{|\psi_n^{(i)}\rangle\}_{i=1}^{N-1}$ が正規直交基底となりさえすれば任意にとることができる.

また, (\hat{q}_B, \hat{p}_B) は一般には (\hat{q}_n, \hat{p}_n) の線形結合とはならないことにも注意が必要である. 次節で見ると, Gauss 状態の場合には (\hat{q}_B, \hat{p}_B) を (\hat{q}_n, \hat{p}_n) の線形結合と仮定すると解が一意に存在する.

6.3 Gauss 真空状態の純粋化パートナー

ここでは自由スカラー場の Gauss 真空状態について, パートナーモードを求める公式を導出する.

まず (1+1) 次元時空上のスカラー場を考える. ハミルトニアンとして

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx : \hat{\Pi}(x)^2 : + \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx : (\partial_x \hat{\phi}(x))^2 : + \frac{m^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx : \hat{\phi}(x)^2 : \quad (6.3.14)$$

を考え, 周期境界条件として

$$\hat{\phi}(t, x + L) = \hat{\phi}(t, x) \quad (6.3.15)$$

を課す. ここで L は空間の長さで, $: \hat{O} :$ は演算子 \hat{O} の正規順序積をとることを表す. $\hat{\Pi}(x)$ は $\hat{\phi}(x)$ の共役運動量で

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(x')] = i\delta(x - x') \quad (6.3.16)$$

を満たす. パートナーの公式を得るために,

$$\hat{\phi}(x) \rightarrow \frac{\hat{q}_n}{\sqrt{m\epsilon}}, \quad \hat{\Pi}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{m}{\epsilon}} \hat{p}_n \quad (6.3.17)$$

とし, 結晶間隔 ϵ に離散化したモデルを考える. $N \equiv \frac{L}{\epsilon}$, $\eta \equiv \frac{1}{(m\epsilon)^2}$ という変数を新たに導入すると, ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N : \hat{p}_n^2 : + \left(\frac{1}{2} + \eta\right) \sum_{n=1}^N : \hat{q}_n^2 : - \eta \sum_{n=1}^N : \hat{q}_n \hat{q}_{n+1} : \quad (6.3.18)$$

となる. $[\hat{q}_m, \hat{p}_n] = i\delta_{mn}$ を満たす正準演算子はモード関数

$$u_k(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i k \frac{n}{N}} \quad (6.3.19)$$

を用いて

$$\hat{q}_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\hat{a}_k u_k(n) + \hat{a}_k^\dagger u_k^*(n)), \quad \hat{p}_n = -i \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (\hat{a}_k u_k(n) - \hat{a}_k^\dagger u_k^*(n)) \quad (6.3.20)$$

と展開できる．ここで ω_k は分散関係

$$\omega_k^2 = 1 + 2\eta \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \quad (6.3.21)$$

を満たす． $[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$ で，真空は $\hat{a}_k |0\rangle = 0$ ($\forall k$) で定義される．(6.2.6) で定義されるモード A の正準演算子 (\hat{q}_A, \hat{p}_A) の共分散行列は

$$m_A = \begin{pmatrix} \langle \hat{q}_A^2 \rangle & \frac{1}{2} \langle \hat{q}_A \hat{p}_A + \hat{p}_A \hat{q}_A \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \hat{p}_A \hat{q}_A + \hat{q}_A \hat{p}_A \rangle & \langle \hat{p}_A^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (6.3.22)$$

で与えられる．局所シンプレクティック変換

$$\begin{pmatrix} \hat{Q}_A \\ \hat{P}_A \end{pmatrix} = S_A \begin{pmatrix} \hat{q}_A \\ \hat{p}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta'_A & \sin \theta'_A \\ -\sin \theta'_A & \cos \theta'_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\sigma_A} & 0 \\ 0 & e^{-\sigma_A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_A & \sin \theta_A \\ -\sin \theta_A & \cos \theta_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_A \\ \hat{p}_A \end{pmatrix} \quad (6.3.23)$$

により，

$$M_A = \begin{pmatrix} \langle \hat{Q}_A^2 \rangle & \frac{1}{2} \langle \hat{Q}_A \hat{P}_A + \hat{P}_A \hat{Q}_A \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \hat{P}_A \hat{Q}_A + \hat{Q}_A \hat{P}_A \rangle & \langle \hat{P}_A^2 \rangle \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (g \geq 0) \quad (6.3.24)$$

の標準形にすることができる*12． g は (6.3.24) の両辺の行列式をとって

$$\frac{1+g^2}{4} = \det M_A = \det m_A = \langle \hat{q}_A^2 \rangle \langle \hat{p}_A^2 \rangle - \frac{1}{4} (\langle \hat{q}_A \hat{p}_A \rangle + \langle \hat{p}_A \hat{q}_A \rangle)^2 \quad (6.3.25)$$

により一意に定まる．ここで 2 つ目の等式で $\det S_A = \det S_A^T = 1$ を使った． $g = 0$ は A のみで純粋状態となっている場合なので，以後 $g \neq 0$ とする．

パートナーモード B を (\hat{q}_n, \hat{p}_n) の線形結合

$$\hat{Q}_B = \sum_{n=1}^N (X_B(n) \hat{q}_n + Y_B(n) \hat{p}_n), \quad \hat{P}_B = \sum_{n=1}^N (Z_B(n) \hat{q}_n + W_B(n) \hat{p}_n) \quad (6.3.26)$$

だと仮定する．純粋化パートナーの満たすべき条件は

(i) 正準交換関係：

$$[\hat{Q}_B, \hat{P}_B] = i \quad (6.3.27)$$

(ii) 局所性：

$$[\hat{Q}_A, \hat{Q}_B] = [\hat{Q}_A, \hat{P}_B] = [\hat{P}_A, \hat{Q}_B] = [\hat{P}_A, \hat{P}_B] = 0 \quad (6.3.28)$$

*12このシンプレクティック変換の具体的な構成方法は付録 D に与えた．

(iii) 純粋化条件 :

$$\begin{aligned}
M_{AB} &\equiv \begin{pmatrix} \langle \hat{Q}_A^2 \rangle & \text{Re} \langle \hat{Q}_A \hat{P}_A \rangle & \langle \hat{Q}_A \hat{Q}_B \rangle & \langle \hat{Q}_A \hat{P}_B \rangle \\ \text{Re} \langle \hat{P}_A \hat{Q}_A \rangle & \langle \hat{P}_A^2 \rangle & \langle \hat{P}_A \hat{Q}_B \rangle & \langle \hat{P}_A \hat{P}_B \rangle \\ \langle \hat{Q}_B \hat{Q}_A \rangle & \langle \hat{Q}_B \hat{P}_A \rangle & \langle \hat{Q}_B^2 \rangle & \text{Re} \langle \hat{Q}_B \hat{P}_B \rangle \\ \langle \hat{P}_B \hat{Q}_A \rangle & \langle \hat{P}_B \hat{P}_A \rangle & \text{Re} \langle \hat{P}_B \hat{Q}_B \rangle & \langle \hat{P}_B^2 \rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} & 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} & 0 & -\frac{g}{2} \\ \frac{g}{2} & 0 & \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2} & 0 & \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \end{pmatrix} \quad (6.3.29)
\end{aligned}$$

Gauss 状態の場合, 純粋化条件は (2.10.112) を用いて (6.3.29) のように簡略化される。
純粋化条件から

$$\langle \hat{Q}_A \hat{P}_B \rangle = \langle \hat{P}_A \hat{Q}_B \rangle = 0 \quad (6.3.30)$$

$$\langle \hat{Q}_A \hat{Q}_B \rangle = -\langle \hat{P}_A \hat{P}_B \rangle = \frac{g}{2} \quad (6.3.31)$$

$$\text{Re} \langle \hat{Q}_B \hat{P}_B \rangle = 0 \quad (6.3.32)$$

$$\langle \hat{Q}_B^2 \rangle = \langle \hat{P}_B^2 \rangle = \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \quad (6.3.33)$$

正準交換関係から

$$\langle \hat{Q}_B \hat{P}_B - \hat{P}_B \hat{Q}_B \rangle = i \quad (6.3.34)$$

これらを満たす (\hat{Q}_B, \hat{P}_B) を探するため,

$$\hat{Q}_A = \left(\frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(Q_A(k)^* \hat{a}_k + Q_A(k) \hat{a}_k^\dagger \right) \quad (6.3.35)$$

$$\hat{P}_A = \left(\frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(P_A(k)^* \hat{a}_k + P_A(k) \hat{a}_k^\dagger \right) \quad (6.3.36)$$

$$\hat{Q}_B = \left(\frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(Q_B(k)^* \hat{a}_k + Q_B(k) \hat{a}_k^\dagger \right) \quad (6.3.37)$$

$$\hat{P}_B = \left(\frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(P_B(k)^* \hat{a}_k + P_B(k) \hat{a}_k^\dagger \right) \quad (6.3.38)$$

と展開する. $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ の線形結合

$$\hat{O}_i = \left(\frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(O_i(k)^* \hat{a}_k + O_i(k) \hat{a}_k^\dagger \right) \quad (6.3.39)$$

で書かれるエルミート演算子 \hat{O}_1, \hat{O}_2 に対し,

$$\langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \rangle = \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \langle O_1, O_2 \rangle \quad (6.3.40)$$

$$\langle O_1, O_2 \rangle \equiv \sum_{k=0}^{N-1} O_1(k)^* O_2(k) \quad (6.3.41)$$

という \mathbb{C}^N 上の内積を定義する. この内積を用いると (6.3.30)-(6.3.34) は

$$\begin{pmatrix} \langle Q_A, Q_A \rangle & \langle Q_A, P_A \rangle & \langle Q_A, Q_B \rangle & \langle Q_A, P_B \rangle \\ \langle P_A, Q_A \rangle & \langle P_A, P_A \rangle & \langle P_A, Q_B \rangle & \langle P_A, P_B \rangle \\ \langle Q_B, Q_A \rangle & \langle Q_B, P_A \rangle & \langle Q_B, Q_B \rangle & \langle Q_B, P_B \rangle \\ \langle P_B, Q_A \rangle & \langle P_B, P_A \rangle & \langle P_B, Q_B \rangle & \langle P_B, P_B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{\sqrt{1+g^2}} & \frac{g}{\sqrt{1+g^2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{1+g^2}} & 1 & 0 & -\frac{g}{\sqrt{1+g^2}} \\ \frac{g}{\sqrt{1+g^2}} & 0 & 1 & \frac{i}{\sqrt{1+g^2}} \\ 0 & -\frac{g}{\sqrt{1+g^2}} & -\frac{i}{\sqrt{1+g^2}} & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.42)$$

と表される.

Q_A と P_B はこの内積の意味で直交しており, また $|\langle Q_A, Q_B \rangle|^2 + |\langle P_B, Q_B \rangle|^2 = 1$ および $|\langle Q_B, Q_B \rangle|^2 = 1$ より, $Q_B(k)$ は

$$Q_B(k) = \langle Q_A, Q_B \rangle Q_A(k) + \langle P_B, Q_B \rangle P_B(k) \quad (6.3.43)$$

$$= \frac{g}{\sqrt{1+g^2}} Q_A(k) - \frac{i}{\sqrt{1+g^2}} P_B(k) \quad (6.3.44)$$

と展開される. 同様に, P_A と Q_B が直交していることと, $|\langle P_A, P_B \rangle|^2 + |\langle Q_B, P_B \rangle|^2 = 1$ および $|\langle P_B, P_B \rangle|^2 = 1$ より

$$P_B(k) = -\frac{g}{\sqrt{1+g^2}} P_A(k) + \frac{i}{\sqrt{1+g^2}} Q_B(k) \quad (6.3.45)$$

と展開される. (6.3.43),(6.3.45) から

$$Q_B(k) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Q_A(k) + \frac{i}{g} P_A(k), \quad P_B(k) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} P_A(k) + \frac{i}{g} Q_A(k) \quad (6.3.46)$$

と $(Q_B(k), P_B(k))$ が一意に定まる. 局所性の条件は

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} (\langle O_1, O_2 \rangle - \langle O_2, O_1 \rangle) \quad (6.3.47)$$

と書けるが, 今の場合自動的に満たされている.

したがって求めたかったパートナーモード B は

$$\hat{Q}_B = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \hat{Q}_A - \frac{i}{g} \left(\frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(P_A(k)^* \hat{a}_k - \hat{P}_A(k) \hat{a}_k^\dagger \right) \quad (6.3.48)$$

$$\hat{P}_B = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \hat{P}_A - \frac{i}{g} \left(\frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(Q_A(k)^* \hat{a}_k - \hat{Q}_A(k) \hat{a}_k^\dagger \right) \quad (6.3.49)$$

となる。重み関数の言葉では

$$X_B(n) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} X_A(n) - \frac{2}{g} \sum_{n'=1}^N \Delta_p(n-n') W_A(n') \quad (6.3.50)$$

$$Y_B(n) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Y_A(n) + \frac{2}{g} \sum_{n'=1}^N \Delta_q(n-n') Z_A(n') \quad (6.3.51)$$

$$Z_B(n) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Z_A(n) - \frac{2}{g} \sum_{n'=1}^N \Delta_p(n-n') Y_A(n') \quad (6.3.52)$$

$$W_B(n) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} W_A(n) + \frac{2}{g} \sum_{n'=1}^N \Delta_q(n-n') X_A(n') \quad (6.3.53)$$

と書かれる。ここで

$$\Delta_q(n-n') \equiv \langle q_n \hat{q}_{n'} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2\omega_k} e^{2\pi i k \frac{n-n'}{N}}, \quad \Delta_p(n-n') \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\omega_k}{2} e^{2\pi i k \frac{n-n'}{N}} \quad (6.3.54)$$

である。

$(d+1)$ 次元の理論を得るため、 n を d 次元ベクトル \mathbf{n} に置き換え、連続極限をとると

$$X_B(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} X_A(\mathbf{x}) - \frac{2}{g} \int d^d \mathbf{x}' \Delta_p(\mathbf{x}-\mathbf{x}') W_A(\mathbf{x}') \quad (6.3.55)$$

$$Y_B(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Y_A(\mathbf{x}) + \frac{2}{g} \int d^d \mathbf{x}' \Delta_q(\mathbf{x}-\mathbf{x}') Z_A(\mathbf{x}') \quad (6.3.56)$$

$$Z_B(\mathbf{x}) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Z_A(\mathbf{x}) - \frac{2}{g} \int d^d \mathbf{x}' \Delta_p(\mathbf{x}-\mathbf{x}') Y_A(\mathbf{x}') \quad (6.3.57)$$

$$W_B(\mathbf{x}) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} W_A(\mathbf{x}) + \frac{2}{g} \int d^d \mathbf{x}' \Delta_q(\mathbf{x}-\mathbf{x}') X_A(\mathbf{x}') \quad (6.3.58)$$

ここで

$$\Delta_q(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \quad (6.3.59)$$

$$\Delta_p(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \quad (6.3.60)$$

である。

6.4 一般の Gauss 状態の純粋化パートナー

次に系の状態が真空 $|0\rangle$ ではなく、一般の Gauss 状態 $|\Psi\rangle$ である場合にパートナーを求める。正準演算子の完全系 $\{(\hat{q}_n, \hat{p}_n)\}_{n=1}^N$, $[\hat{q}_m, \hat{p}_n] = i\delta_{nm}$ が与えられたと

$$\hat{q}_n \rightarrow \hat{q}_n - \langle \Psi | \hat{q}_n | \Psi \rangle, \quad \hat{p}_n \rightarrow \hat{p}_n - \langle \Psi | \hat{p}_n | \Psi \rangle \quad (6.4.61)$$

とシフトすることで、 $\langle \Psi | \hat{q}_n | \Psi \rangle = 0$, $\langle \Psi | \hat{p}_n | \Psi \rangle = 0$ とできるから以後 1 次のモーメントは 0 だとする。モード A を

$$\hat{q}_A = \sum_{n=1}^N (x_A(n) \hat{q}_n + y_A(n) \hat{p}_n) \equiv \mathbf{v}_A^T \hat{\mathbf{r}} \quad (6.4.62)$$

$$\hat{p}_A = \sum_{n=1}^N (z_A(n) \hat{q}_n + w_A(n) \hat{p}_n) \equiv \mathbf{u}_A^T \hat{\mathbf{r}} \quad (6.4.63)$$

で定義する。

ここで $\hat{\mathbf{r}} \equiv (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{q}_N, \hat{p}_N)^T$, $\mathbf{v}_A \equiv (x_A(1), y_A(1), \dots, x_A(N), y_A(N))^T$, $\mathbf{u}_A \equiv (z_A(1), w_A(1), \dots, z_A(N), w_A(N))^T$ である。

正準交換関係 $[\hat{q}_A, \hat{p}_A] = i$ は $\mathbf{v}_A^T \Omega \mathbf{u}_A = 1$ と書かれる。

局所シンプレクティック変換 $(\hat{q}_A, \hat{p}_A) \rightarrow (\hat{Q}_A, \hat{P}_A) \equiv (\mathbf{V}_A^T \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{U}_A^T \hat{\mathbf{r}})$ により共分散行列を標準形にする

$$\begin{pmatrix} \langle \Psi | \hat{Q}_A^2 | \Psi \rangle & \text{Re} \langle \Psi | \hat{Q}_A \hat{P}_A | \Psi \rangle \\ \text{Re} \langle \Psi | \hat{P}_A \hat{Q}_A | \Psi \rangle & \langle \Psi | \hat{P}_A^2 | \Psi \rangle \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4.64)$$

$$g \equiv \sqrt{4(\langle \Psi | \hat{q}_A^2 | \Psi \rangle \langle \Psi | \hat{p}_A^2 | \Psi \rangle - \text{Re} \langle \Psi | \hat{q}_A \hat{p}_A | \Psi \rangle)} - 1 \quad (6.4.65)$$

この条件は、 $M \equiv \text{Re} \langle \Psi | \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}^T | \Psi \rangle$ として

$$\mathbf{V}_A^T M \mathbf{V}_A = \mathbf{U}_A^T M \mathbf{U}_A = \frac{\sqrt{1+g^2}}{2}, \quad \mathbf{V}_A^T M \mathbf{U}_A = \mathbf{U}_A^T M \mathbf{V}_A = 0 \quad (6.4.66)$$

と書かれる。この変換により正準交換関係は

$$\mathbf{V}_A^T \Omega \mathbf{U}_A = -\mathbf{U}_A^T \Omega \mathbf{V}_A = 1 \quad (6.4.67)$$

となる。

これらを満たすモード A に対し、モード B を $(\hat{Q}_B, \hat{P}_B) \equiv (\mathbf{V}_B^T \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{U}_B^T \hat{\mathbf{r}})$ で定義する。モード B が A の純粋化パートナーになる条件は正準交換関係から

$$\mathbf{V}_B^T \Omega \mathbf{U}_B = -\mathbf{U}_B^T \Omega \mathbf{V}_B = 1 \quad (6.4.68)$$

局所性から

$$\mathbf{V}_A^T \Omega \mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A^T \Omega \mathbf{U}_B = \mathbf{U}_A^T \Omega \mathbf{V}_B = \mathbf{U}_A^T \Omega \mathbf{U}_B = 0 \quad (6.4.69)$$

純粋化の条件から

$$\mathbf{V}_A^T M \mathbf{V}_B = -\mathbf{U}_A^T M \mathbf{U}_B = \frac{g}{2} \quad (6.4.70)$$

$$\mathbf{V}_A^T M \mathbf{U}_B = \mathbf{U}_A^T M \mathbf{V}_B = 0 \quad (6.4.71)$$

$$\mathbf{V}_B^T M \mathbf{V}_B = \mathbf{U}_B^T M \mathbf{U}_B = \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \quad (6.4.72)$$

$$\mathbf{V}_B^T M \mathbf{U}_B = 0 \quad (6.4.73)$$

(6.4.66)-(6.4.67) の制約の下で (6.4.68)-(6.4.73) を満たす $\mathbf{V}_B, \mathbf{U}_B$ を探す。
 まず \mathbf{V}_B として

$$M\mathbf{V}_B = c_1 M\mathbf{V}_A + c_2 \Omega \mathbf{U}_A + c_3 \left(\frac{2}{\sqrt{1+g^2}} M\mathbf{U}_A + \Omega \mathbf{V}_A \right) \quad (6.4.74)$$

の形を仮定する。このとき $\mathbf{U}_A^T M\mathbf{V}_B = 0$ は自動的に成り立つ。

$\mathbf{V}_A^T M\mathbf{V}_B = \frac{g}{2}$ を課すと、

$$\frac{g}{2} = c_1 \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} + c_2 + 0 \quad (6.4.75)$$

が得られる。次に Gauss 純粋状態で成り立つ式 $M\Omega M = \frac{1}{4}\Omega$ を用いると

$$\mathbf{V}_B = c_1 \mathbf{V}_A + 4c_2 \Omega M\mathbf{U}_A + c_3 \left(\frac{2}{\sqrt{1+g^2}} \mathbf{U}_A + 4\Omega M\mathbf{V}_A \right) \quad (6.4.76)$$

なので、 $\mathbf{U}_A^T \Omega \mathbf{V}_B = 0$ を課すと、

$$\begin{aligned} 0 &= 0 - 4c_2 \mathbf{V}_A^T M\mathbf{U}_A + c_3 \left(\frac{2}{\sqrt{1+g^2}} - 4\mathbf{V}_A^T M\mathbf{V}_A \right) \\ &= 2c_3 \left(\frac{1}{\sqrt{1+g^2}} - \sqrt{1+g^2} \right) \end{aligned} \quad (6.4.77)$$

であるが、 $g \neq 0$ なので $c_3 = 0$ である。

さらに $\mathbf{U}_A^T \Omega \mathbf{V}_B = 0$ を課して、

$$\begin{aligned} 0 &= -c_1 - 4c_2 \mathbf{U}_A^T M\mathbf{U}_A + c_3 (0 - 4\mathbf{U}_A^T M\mathbf{V}_A) \\ &= -c_1 - 2c_2 \sqrt{1+g^2} \end{aligned} \quad (6.4.78)$$

(6.4.75)(6.4.77)(6.4.78) から

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \\ -\frac{1}{2g} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.4.79)$$

となる。 \mathbf{U}_B に対しても同様に求めることができ

$$\mathbf{V}_B = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \mathbf{V}_A - \frac{2}{g} \Omega M\mathbf{U}_A, \quad \mathbf{U}_B = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \mathbf{U}_A - \frac{2}{g} \Omega M\mathbf{V}_A \quad (6.4.80)$$

となる。これらが残りの条件 (6.4.68)(6.4.72)(6.4.73) を満たすことは直接代入することで確かめることができる。したがって (6.4.80) が求めるべき純粋化パートナである。重み関数を 2 点関数

で書き直すと

$$X_B(n) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} X_A(n) - \frac{2}{g} \sum_{m=1}^N (\operatorname{Re} \langle \Psi | \hat{p}_n \hat{q}_m | \Psi \rangle Z_A(m) + \langle \Psi | \hat{p}_n \hat{p}_m | \Psi \rangle W_A(m)) \quad (6.4.81)$$

$$Y_B(n) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Y_A(n) + \frac{2}{g} \sum_{m=1}^N (\operatorname{Re} \langle \Psi | \hat{q}_n \hat{p}_m | \Psi \rangle W_A(m) + \langle \Psi | \hat{q}_n \hat{q}_m | \Psi \rangle Z_A(m)) \quad (6.4.82)$$

$$Z_B(n) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Z_A(n) - \frac{2}{g} \sum_{m=1}^N (\operatorname{Re} \langle \Psi | \hat{p}_n \hat{q}_m | \Psi \rangle X_A(m) + \langle \Psi | \hat{p}_n \hat{p}_m | \Psi \rangle Y_A(m)) \quad (6.4.83)$$

$$W_B(n) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} W_A(n) + \frac{2}{g} \sum_{m=1}^N (\operatorname{Re} \langle \Psi | \hat{q}_n \hat{p}_m | \Psi \rangle Y_A(m) + \langle \Psi | \hat{q}_n \hat{q}_m | \Psi \rangle X_A(m)) \quad (6.4.84)$$

となる．適切に極限をとれば

$$X_B(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} X_A(\mathbf{x}) - \frac{2}{g} \int d^d \mathbf{y} \left(\operatorname{Re} \langle \Psi | \hat{\Pi}(\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{y}) | \Psi \rangle Z_A(\mathbf{y}) + \langle \Psi | \hat{\Pi}(\mathbf{x}) \hat{\Pi}(\mathbf{y}) | \Psi \rangle W_A(\mathbf{y}) \right) \quad (6.4.85)$$

$$Y_B(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Y_A(\mathbf{x}) + \frac{2}{g} \int d^d \mathbf{y} \left(\operatorname{Re} \langle \Psi | \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{\Pi}(\mathbf{y}) | \Psi \rangle W_A(\mathbf{y}) + \langle \Psi | \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{y}) | \Psi \rangle Z_A(\mathbf{y}) \right) \quad (6.4.86)$$

$$Z_B(\mathbf{x}) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Z_A(\mathbf{x}) - \frac{2}{g} \int d^d \mathbf{y} \left(\operatorname{Re} \langle \Psi | \hat{\Pi}(\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{y}) | \Psi \rangle X_A(\mathbf{y}) + \langle \Psi | \hat{\Pi}(\mathbf{x}) \hat{\Pi}(\mathbf{y}) | \Psi \rangle Y_A(\mathbf{y}) \right) \quad (6.4.87)$$

$$W_B(\mathbf{x}) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} W_A(\mathbf{x}) + \frac{2}{g} \int d^d \mathbf{y} \left(\operatorname{Re} \langle \Psi | \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{\Pi}(\mathbf{y}) | \Psi \rangle Y_A(\mathbf{y}) + \langle \Psi | \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{y}) | \Psi \rangle X_A(\mathbf{y}) \right) \quad (6.4.88)$$

とスカラー場での純粋化パートナーの公式が2点関数の言葉で書かれる．

6.5 曲がった空間での純粋化パートナー

ここでは前節までの純粋化パートナーの公式を曲がった空間上のスカラー場に拡張する． $(d+1)$ 次元時空の計量を $g_{\mu\nu}$ とし，時空は大域的双曲であるとする．このとき時空には Cauchy 面の族 Σ_τ による葉層構造が導入でき，それをパラメトライズするパラメータ τ を時間とみなすことができる．

さらに時空は漸近的に平坦な2つの領域 “in” 領域と “out” 領域をもつとする：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \begin{cases} -dt^2 + d\mathbf{x}^2 & (\text{in region}) \\ -d\bar{t}^2 + d\bar{\mathbf{x}}^2 & (\text{out region}) \end{cases} \quad (6.5.89)$$

$(t, \mathbf{x}), (\bar{t}, \bar{\mathbf{x}})$ はそれぞれ “in” 領域と “out” 領域の座標を表す．この間の中間領域に関しては特に制限は設けないこととする．この時空上での自由スカラー場の作用は

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g(x)} \frac{1}{2} (-g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) - (m(x)^2 + \xi R(x)) \phi(x)^2) \quad (6.5.90)$$

である。ここで $m(x)$ はスカラー場の質量, $R(x)$ は時空のリッチスカラー, ξ はスカラー場と重力場の結合の強さを表す量である。運動方程式は

$$(\square + m(x)^2 + \xi R(x)) \hat{\phi}(x) = 0 \quad \left(\square \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \right) \quad (6.5.91)$$

となる。共役運動量は

$$\hat{\Pi}(x) = -\sqrt{-g} g^{\tau\mu} \partial_\mu \hat{\phi}(x) = \begin{cases} \partial_t \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) & (\text{in region}) \\ \partial_{\bar{t}} \hat{\phi}(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) & (\text{out region}) \end{cases} \quad (6.5.92)$$

で与えられる。 $R(x)$ は “in” 領域と “out” 領域では 0 である。またスカラー場の質量は

$$m(x) = \begin{cases} m & (\text{in region}) \\ \bar{m} & (\text{out region}) \end{cases} \quad (6.5.93)$$

であるとする。漸近領域での運動方程式の解は

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d 2E_{\mathbf{k}}}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - E_{\mathbf{k}} t)} \quad (\text{in region}) \quad (6.5.94)$$

$$\bar{u}_{\mathbf{k}}(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d 2\bar{E}_{\mathbf{k}}}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}} - \bar{E}_{\mathbf{k}} \bar{t})} \quad (\text{out region}) \quad (6.5.95)$$

ここで $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, $\bar{E}_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + \bar{m}^2}$ である。規格化定数は KG 内積 (3.1.6) について $\langle u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'} \rangle = \langle \bar{u}_{\mathbf{k}}, \bar{u}_{\mathbf{k}'} \rangle = \delta^{(d)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ を満たすように決めた。これらはそれぞれが正エネルギー解の完全系をなすので、スカラー場は次のように量子化できる：

$$\hat{\phi}^H(x) = \int d^d \mathbf{k} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}(x)^* \right) = \int d^d \mathbf{k} \left(\hat{\bar{a}}_{\mathbf{k}} \bar{u}_{\mathbf{k}}(x) + \hat{\bar{a}}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{u}_{\mathbf{k}}(x)^* \right) \quad (6.5.96)$$

ここで $\hat{\phi}^H(x)$ の添え字 H は Heisenberg 描像の演算子であることを表している。各生成消滅演算子 $(\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)$ と $(\hat{\bar{a}}_{\mathbf{k}}, \hat{\bar{a}}_{\mathbf{k}}^\dagger)$ は Bogoliubov 変換により

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \langle u_{\mathbf{k}}, \hat{\phi} \rangle = \int d^d \mathbf{k}' \left(\alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \bar{\hat{a}}_{\mathbf{k}'} + \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \hat{\bar{a}}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right) \quad (6.5.97)$$

$$\bar{\hat{a}}_{\mathbf{k}} = \langle \bar{u}_{\mathbf{k}}, \hat{\phi} \rangle = \int d^d \mathbf{k}' \left(\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{a}_{\mathbf{k}'} - \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right) \quad (6.5.98)$$

$$\alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \equiv \langle u_{\mathbf{k}}, \bar{u}_{\mathbf{k}'} \rangle \quad \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \equiv \langle u_{\mathbf{k}}, \bar{u}_{\mathbf{k}'}^* \rangle \quad (6.5.99)$$

で繋がる。前節で行った手続きは任意の Gauss 状態と正準交換関係を満たす演算子に対して有効であるから、Heisenberg 描像の場合でも純粋化パートナーの公式を得ることができる。

“out” 領域の $\tau = \bar{t}$ でのモード A を

$$\hat{q}_A^H = \int d^d \bar{\mathbf{x}} \left(x_A(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) + y_A(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \right) \quad (6.5.100)$$

$$\hat{p}_A^H = \int d^d \bar{\mathbf{x}} \left(z_A(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) + w_A(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \right) \quad (6.5.101)$$

$$[\hat{q}_A^H, \hat{p}_A^H] = i \quad (6.5.102)$$

で定義する。シンプレクティック変換により,

$$\hat{Q}_A^H = \int d^d \bar{\mathbf{x}} \left(X_A(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) + Y_A(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \right) \quad (6.5.103)$$

$$\hat{P}_A^H = \int d^d \bar{\mathbf{x}} \left(Z_A(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) + W_A(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \right) \quad (6.5.104)$$

$$\begin{pmatrix} \langle \Psi | (\hat{Q}_A^H)^2 | \Psi \rangle & \text{Re} \langle \Psi | \hat{Q}_A^H \hat{P}_A^H | \Psi \rangle \\ \text{Re} \langle \Psi | \hat{P}_A^H \hat{Q}_A^H | \Psi \rangle & \langle \Psi | (\hat{P}_A^H)^2 | \Psi \rangle \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.5.105)$$

$$g \equiv \sqrt{4 \left(\langle \Psi | (\hat{Q}_A^H)^2 | \Psi \rangle \langle \Psi | (\hat{P}_A^H)^2 | \Psi \rangle - \text{Re} \langle \Psi | \hat{Q}_A^H \hat{P}_A^H | \Psi \rangle \right) - 1} \quad (6.5.106)$$

と変換すると, 純粋化パートナーモード B の重み関数は

$$X_B(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} X_A(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{2}{g} \int d^d \bar{\mathbf{y}} \left(\text{Re} \langle \Psi | \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | \Psi \rangle Z_A(\bar{\mathbf{y}}) + \langle \Psi | \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | \Psi \rangle W_A(\bar{\mathbf{y}}) \right) \quad (6.5.107)$$

$$Y_B(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Y_A(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{2}{g} \int d^d \bar{\mathbf{y}} \left(\text{Re} \langle \Psi | \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | \Psi \rangle W_A(\bar{\mathbf{y}}) + \langle \Psi | \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | \Psi \rangle Z_A(\bar{\mathbf{y}}) \right) \quad (6.5.108)$$

$$Z_B(\bar{\mathbf{x}}) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Z_A(\bar{\mathbf{x}}) - \frac{2}{g} \int d^d \bar{\mathbf{y}} \left(\text{Re} \langle \Psi | \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | \Psi \rangle X_A(\bar{\mathbf{y}}) + \langle \Psi | \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | \Psi \rangle Y_A(\bar{\mathbf{y}}) \right) \quad (6.5.109)$$

$$W_B(\bar{\mathbf{x}}) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} W_A(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{2}{g} \int d^d \bar{\mathbf{y}} \left(\text{Re} \langle \Psi | \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | \Psi \rangle Y_A(\bar{\mathbf{y}}) + \langle \Psi | \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | \Psi \rangle X_A(\bar{\mathbf{y}}) \right) \quad (6.5.110)$$

$\bar{t} = \bar{t}_{\text{obs}}$ に Unruh-DeWitt 検出器で場の情報を読み出すという状況では, 場と検出器の相互作用を考える必要があり, この際 Schrödinger 描像でのパートナー公式が有用である.

“in”領域において $\tau = t_0$ に系が真空 $|0\rangle$ にあるとすると, “out”領域で $\psi(\bar{t}) = U(\bar{t}, t_0) |0\rangle$ の状態に時間発展する. ここで $U(\bar{t}, t_0)$ は時間発展演算子

$$U(\bar{t}, t_0) \equiv \mathcal{T} \exp \left(-i \int_{t_0}^{\bar{t}} d\tau \int_{\Sigma_\tau} d^d \mathbf{x} \mathcal{H} \right) \quad (6.5.111)$$

で, ハミルトニアン密度 \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} \equiv: \hat{\Pi} \partial_\tau \hat{\phi} - \mathcal{L}(\hat{\phi}) : \quad (6.5.112)$$

で定義される. $|0\rangle$ が Gauss 状態で, ハミルトニアンが双線形であるから, $|\psi(\bar{t})\rangle$ も Gauss 状態である. このとき Heisenberg 描像の演算子と Schrödinger 描像の演算子は

$$\hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) = U^\dagger(\bar{t}, t_0) \hat{\phi}^S(\mathbf{x}) U(\bar{t}, t_0), \quad \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) = U^\dagger(\bar{t}, t_0) \hat{\Pi}^S(\mathbf{x}) U(\bar{t}, t_0) \quad (6.5.113)$$

の関係があり, $\langle \psi(\bar{t}) | \hat{\phi}^S(\mathbf{x}) \hat{\Pi}^S(\mathbf{x}) | \psi(\bar{t}) \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) | 0 \rangle$ 等から, Schrödinger 描像での純粋化パートナーモード B は

$$\hat{Q}_B^S = \int d^d \bar{\mathbf{x}} \left(X_B(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^S(\bar{\mathbf{x}}) + Y_B(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^S(\bar{\mathbf{x}}) \right) \quad (6.5.114)$$

$$\hat{P}_B^S = \int d^d \bar{\mathbf{x}} \left(Z_B(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^S(\bar{\mathbf{x}}) + W_B(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^S(\bar{\mathbf{x}}) \right) \quad (6.5.115)$$

で, 重み関数は (6.5.107)-(6.5.110) の $|\Psi\rangle$ を $|0\rangle$ に置き換えたものとして求まる. 2点関数を Bogoliubov 係数で書いておくと,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | 0 \rangle &= \int d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}' d^d \mathbf{p} \left(\bar{u}_{\mathbf{k}}(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^* - \bar{u}_{\mathbf{k}}^*(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \beta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \right) \left(\bar{u}_{\mathbf{k}'}^*(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) \alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} - \bar{u}_{\mathbf{k}'}(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{p}}^* \right) \\ &\quad \times \text{Re} \langle 0 | \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | 0 \rangle \\ &= \int d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}' d^d \mathbf{p} \text{Re} \left[\left(\bar{u}_{\mathbf{k}}(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^* - \bar{u}_{\mathbf{k}}^*(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \beta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \right) (i \bar{E}_{\mathbf{k}'}) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\bar{u}_{\mathbf{k}'}^*(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) \alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} + \bar{u}_{\mathbf{k}'}(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{p}}^* \right) \right] \\ &= - \int d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}' d^d \mathbf{p} \text{Im} \left[\left(\bar{u}_{\mathbf{k}}(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^* - \bar{u}_{\mathbf{k}}^*(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \beta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \right) \bar{E}_{\mathbf{k}'} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\bar{u}_{\mathbf{k}'}^*(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) \alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} + \bar{u}_{\mathbf{k}'}(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{p}}^* \right) \right] \end{aligned} \quad (6.5.116)$$

$$\langle 0 | \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | 0 \rangle = \int d^d \mathbf{k} d^d \mathbf{k}' d^d \mathbf{p} \bar{E}_{\mathbf{k}} \bar{E}_{\mathbf{k}'} \left(\bar{u}_{\mathbf{k}}(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \alpha_{\mathbf{k}\mathbf{p}}^* + \bar{u}_{\mathbf{k}}^*(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \beta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \right) \left(\bar{u}_{\mathbf{k}'}^*(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) \alpha_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} + \bar{u}_{\mathbf{k}'}(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) \beta_{\mathbf{k}'\mathbf{p}}^* \right) \quad (6.5.117)$$

となる. また, g を求めるのに必要なモード A の 2点関数は, これらから例えば

$$\begin{aligned} \langle 0 | (\hat{q}_A^H)^2 | 0 \rangle &= \int d^d \bar{\mathbf{x}} d^d \bar{\mathbf{y}} x_A(\bar{\mathbf{x}}) \langle 0 | \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | 0 \rangle x_A(\bar{\mathbf{y}}) \\ &\quad + 2x_A(\bar{\mathbf{x}}) \text{Re} \langle 0 | \hat{\phi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | 0 \rangle y_A(\bar{\mathbf{y}}) + y_A(\bar{\mathbf{x}}) \langle 0 | \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\Pi}^H(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}) | 0 \rangle y_A(\bar{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (6.5.118)$$

のように求めることができる.

6.6 純粋化パートナーの性質

求められた純粋化パートナー B の重み関数をみると, 純粋化パートナーは次の二つのクラスがあることがわかる. すなわち, 重み関数 $\{X_B(\mathbf{x}), Y_B(\mathbf{x}), Z_B(\mathbf{x}), W_B(\mathbf{x})\}$ が $\{X_A(\mathbf{x}), Y_A(\mathbf{x}), Z_A(\mathbf{x}), W_A(\mathbf{x})\}$ と “空間的に重なりを持つパートナー” と, “空間的に重なりを持たないパートナー” である.

[21] に従い前者を spatially overlapped partner (SOP), 後者を spatially separated partner (SSP) と呼ぶ.

連結調和振動子系の SSP に関してはこれまでに [37] で詳細に調べられているが, SOP はこれまでになかった新しいクラスである. 得られたパートナー公式からわかるように, 2点関数の積分で書

かれる項の寄与が特殊な値をとるときのみ SSP となるため、一般的に得られるパートナーは SOP である。このことは量子エンタングルメントを議論する際に導入する局所性を必ずしも空間的なもので導入する必要がないということである。

例えば真空の連結調和振動子で、簡単のために $Y_A(n) = Z_A(n) = 0$ の場合を考える。

$$X_A(n) \begin{cases} \neq 0 & (1 \leq n \leq L) \\ = 0 & (L < n \leq N) \end{cases}, \quad W_A(n) \begin{cases} \neq 0 & (1 \leq n \leq L) \\ = 0 & (L < n \leq N) \end{cases} \quad (6.6.119)$$

のように、 A が $1 \leq n \leq L$ でのみ値をもつとすると、(6.3.50)(6.3.53) から、 $1 \leq n \leq L$ で

$$\sum_{n'}^L \Delta_p(n - n') W_A(n') = \frac{\sqrt{1 + g^2}}{2} X_A(n) \quad (6.6.120)$$

$$\sum_{n'}^L \Delta_q(n - n') X_A(n') = \frac{\sqrt{1 + g^2}}{2} W_A(n) \quad (6.6.121)$$

が満たされるときのみ

$$X_B(n) = 0, \quad W_B(n) = 0 \quad (1 \leq n \leq L) \quad (6.6.122)$$

となり空間的に重なりを持たない、SSP となる。

Hawking 輻射の純粋化パートナーにおいても、5.2 節や [29] のようにこれまでは SSP のみが議論されており、一般的に得られる SOP が情報損失問題に対し新たな知見をもたらす可能性がある。

また、量子系から量子エンタングルメントを取り出すエンタングルメントハーベスティングという量子プロトコルにおいて、[21] の著者達により SOP を用いてその効率をあげる方法が [22] で考案されている。

6.7 動的鏡模型における純粋化パートナー

この節では前節までの純粋化パートナーの公式を動的鏡模型に適用し、Hawking 輻射の純粋化パートナーを考える。

まず正準交換関係を満たす A 系の演算子を次のように定義する。

$$\hat{q}_A = \int_{-\infty}^{\infty} q_A(v) \hat{\Pi}_{in}(v) dv \quad (6.7.123)$$

$$\hat{p}_A = \int_{-\infty}^{\infty} p_A(v) \hat{\Pi}_{in}(v) dv \quad (6.7.124)$$

ここで $\hat{\Pi}_{in}(v)$ は (5.1.31) で定義した演算子で,

$$\begin{aligned}
[\hat{q}_A, \hat{p}_A] &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dv' q_A(v) p_A(v') [\hat{\Pi}_{in}(v), \hat{\Pi}_{in}(v')] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dv' q_A(v) p_A(v') \frac{i}{2} \partial_v \delta(v - v') \\
&= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dv (\partial_v q_A(v)) p_A(v) \\
&= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dv q_A(v) (\partial_v p_A(v))
\end{aligned} \tag{6.7.125}$$

より, 正準交換関係 $[q_A, p_A] = i$ が満たされるために実関数 $q_A(v), p_A(v)$ は

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dv q_A(v) \partial_v p_A(v) = 1 \tag{6.7.126}$$

を満たす.

(5.1.32) で定義した演算子 $\hat{\Pi}_{out}(u)$ は関係式

$$\hat{\Pi}_{out}(u) = -\partial_u p(u) \hat{\Pi}_{in}(p(u)) \tag{6.7.127}$$

を満たすので, \hat{q}_A, \hat{p}_A は次のようにも書ける.

$$\hat{q}_A = - \int_{-\infty}^{\infty} q_A(p(u)) \hat{\Pi}_{out}(u) du \equiv \int_{-\infty}^{\infty} q'_A(u) \hat{\Pi}_{out}(u) du \tag{6.7.128}$$

$$\hat{p}_A = - \int_{-\infty}^{\infty} p_A(p(u)) \hat{\Pi}_{out}(u) du \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p'_A(u) \hat{\Pi}_{out}(u) du \tag{6.7.129}$$

ここで

$$q'_A(v) = -q_A(p(u)) \tag{6.7.130}$$

$$p'_A(v) = -p_A(p(u)) \tag{6.7.131}$$

である。このように定義した A 系の演算子に対し、純粋化パートナー B の演算子を考える。
 A をシンプレクティック変換するのに必要な各量は

$$\begin{aligned} \langle 0_{in} | \hat{q}_A^2 | 0_{in} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dv' q_A(v) q_A(v') \langle 0_{in} | \hat{\Pi}_{in}(v) \hat{\Pi}_{in}(v') | 0_{in} \rangle \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_A(v) q_A(v')}{(v-v'-i\epsilon)^2} dv dv' \end{aligned} \quad (6.7.132)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q'_A(u) q'_A(u')}{(p(u)-p(u')-i\epsilon)^2} \partial_u p(u) \partial_{u'} p(u') du du' \quad (6.7.133)$$

$$\langle 0_{in} | \hat{p}_A^2 | 0_{in} \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_A(v) p_A(v')}{(v-v'-i\epsilon)^2} dv dv' \quad (6.7.134)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'_A(u) p'_A(u')}{(p(u)-p(u')-i\epsilon)^2} \partial_u p(u) \partial_{u'} p(u') du du' \quad (6.7.135)$$

$$\langle 0_{in} | \hat{q}_A \hat{p}_A | 0_{in} \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_A(v) p_A(v')}{(v-v'-i\epsilon)^2} dv dv' \quad (6.7.136)$$

$$\langle 0_{in} | \hat{p}_A \hat{q}_A | 0_{in} \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_A(v) q_A(v')}{(v-v'+i\epsilon)^2} dv dv' \quad (6.7.137)$$

$$g = \sqrt{4 \langle 0_{in} | \hat{q}_A^2 | 0_{in} \rangle \langle 0_{in} | \hat{p}_A^2 | 0_{in} \rangle - [\langle 0_{in} | \hat{q}_A \hat{p}_A | 0_{in} \rangle + \langle 0_{in} | \hat{p}_A \hat{q}_A | 0_{in} \rangle]^2} - 1 \quad (6.7.138)$$

のように計算される。これらから付録 D の方法により、シンプレクティック行列 S_A を求め、

$$\begin{pmatrix} \hat{Q}_A \\ \hat{P}_A \end{pmatrix} = S_A \begin{pmatrix} \hat{q}_A \\ \hat{p}_A \end{pmatrix} \quad (6.7.139)$$

とシンプレクティック変換する。変換後の演算子は

$$\hat{Q}_A = \int_{-\infty}^{\infty} Q_A^{in}(v) \hat{\Pi}_{in}(v) dv \quad (6.7.140)$$

$$\hat{P}_A = \int_{-\infty}^{\infty} P_A^{in}(v) \hat{\Pi}_{in}(v) dv \quad (6.7.141)$$

$$\begin{pmatrix} Q_A^{in}(v) \\ P_A^{in}(v) \end{pmatrix} = S_A \begin{pmatrix} q_A(v) \\ p_A(v) \end{pmatrix} \quad (6.7.142)$$

となる。

この場合のパートナー公式は本質的には真空の Gauss 状態の場合と同じようにして求めることができる。

まず重み関数のフーリエ変換を

$$Q_A^{in}(v) = \frac{(1+g^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}_A^{in}(k) e^{-ikv} dk \quad (6.7.143)$$

$$P_A^{in}(v) = \frac{(1+g^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_A^{in}(k) e^{-ikv} dk \quad (6.7.144)$$

と定義する. $Q_A^{in}(v)$, $P_A^{in}(v)$ は実関数だからフーリエ成分は

$$\tilde{Q}_A^{in}(-k) = \tilde{Q}_A^{in}(k)^* \quad (6.7.145)$$

$$\tilde{P}_A^{in}(-k) = \tilde{P}_A^{in}(k)^* \quad (6.7.146)$$

を満たす.

共分散行列の成分は例えば

$$\begin{aligned} \langle \hat{Q}_A^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} Q_A^{in}(v) Q_A^{in}(v') \langle 0_{in} | \hat{\Pi}_{in}(v) \hat{\Pi}_{in}(v') | 0_{in} \rangle dv dv' \\ &= \frac{\sqrt{1+g^2}}{4\pi} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{Q}_A^{in}(k) \tilde{Q}_A^{in}(k') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(k+\omega)v}}{\sqrt{2\pi}} dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(k'-\omega)v'}}{\sqrt{2\pi}} dv' \\ &= \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \int_0^{\infty} \tilde{Q}_A^{in}(\omega)^* \tilde{Q}_A^{in}(\omega) \omega d\omega \end{aligned} \quad (6.7.147)$$

のようになる. ここで $\omega \geq 0$ のフーリエ成分に対し

$$\langle F, G \rangle \equiv \int_0^{\infty} F(\omega)^* G(\omega) \omega d\omega \quad (6.7.148)$$

という内積を定義すると, 共分散行列を用いた純粋化条件は

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \begin{pmatrix} \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle & \text{Re} \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle & \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle \\ \text{Re} \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle \\ \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle & \text{Re} \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle \\ \langle \tilde{P}_B^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_B^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle & \text{Re} \langle \tilde{P}_B^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_B^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} & 0 & \frac{g}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} & 0 & -\frac{g}{2} \\ \frac{g}{2} & 0 & \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2} & 0 & \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.7.149)$$

交換関係 $[\hat{Q}_A, \hat{P}_A] = i$ からは

$$\frac{\sqrt{1+g^2}}{2} [\langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle - \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle] = i \quad (6.7.150)$$

すなわち

$$\text{Im} \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \quad (6.7.151)$$

を得る. 同様に $[\hat{Q}_B, \hat{P}_B] = i$ から

$$\text{Im} \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \quad (6.7.152)$$

を得る.

局所性 $[\hat{Q}_A, \hat{Q}_B] = [\hat{Q}_A, \hat{P}_B] = [\hat{P}_A, \hat{Q}_B] = [\hat{P}_A, \hat{P}_B] = 0$ からは

$$\text{Im} \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle = \text{Im} \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle = \text{Im} \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle = \text{Im} \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle = 0 \quad (6.7.153)$$

条件 (6.7.149),(6.7.151),(6.7.152),(6.7.153) を纏めると,

$$\begin{pmatrix} \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle & \langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle \\ \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle \\ \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle & \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle \\ \langle \tilde{P}_B^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_B^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_B^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle & \langle \tilde{P}_B^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{\sqrt{1+g^2}} & \frac{g}{\sqrt{1+g^2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{1+g^2}} & 1 & 0 & -\frac{g}{\sqrt{1+g^2}} \\ \frac{g}{\sqrt{1+g^2}} & 0 & 1 & \frac{i}{\sqrt{1+g^2}} \\ 0 & -\frac{g}{\sqrt{1+g^2}} & -\frac{i}{\sqrt{1+g^2}} & 1 \end{pmatrix} \quad (6.7.154)$$

これより

$$|\langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle|^2 + |\langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle|^2 = 1 \quad (6.7.155)$$

および

$$\langle \tilde{Q}_A^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle = \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{P}_A^{in} \rangle = \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle = 1, \quad \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{Q}_B^{in} \rangle = 0 \quad (6.7.156)$$

から

$$\tilde{Q}_A^{in}(\omega) = \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle \tilde{P}_A^{in}(\omega) + \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{Q}_A^{in} \rangle \tilde{Q}_B^{in}(\omega) \quad (\omega \geq 0) \quad (6.7.157)$$

が得られる。同じく

$$|\langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle|^2 + |\langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle|^2 = 1 \quad (6.7.158)$$

から

$$\tilde{P}_B^{in}(\omega) = \langle \tilde{P}_A^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle \tilde{P}_A^{in}(\omega) + \langle \tilde{Q}_B^{in}, \tilde{P}_B^{in} \rangle \tilde{Q}_B^{in}(\omega) \quad (\omega \geq 0) \quad (6.7.159)$$

を得る。これらから

$$\tilde{Q}_B^{in}(\omega) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \tilde{Q}_A^{in}(\omega) + \frac{i}{g} \tilde{P}_A^{in}(\omega) \quad (\omega \geq 0) \quad (6.7.160)$$

$$\tilde{P}_B^{in}(\omega) = \frac{i}{g} \tilde{Q}_A^{in}(\omega) - \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \tilde{P}_A^{in}(\omega) \quad (\omega \geq 0) \quad (6.7.161)$$

また, $k = -\omega < 0$ のフーリエ成分に対しては (6.7.145) より

$$\tilde{Q}_B^{in}(-\omega) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \tilde{Q}_A^{in}(-\omega) - \frac{i}{g} \tilde{P}_A^{in}(-\omega) \quad (\omega \geq 0) \quad (6.7.162)$$

$$\tilde{P}_B^{in}(-\omega) = -\frac{i}{g} \tilde{Q}_A^{in}(-\omega) - \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \tilde{P}_A^{in}(-\omega) \quad (\omega \geq 0) \quad (6.7.163)$$

となるので, $-\infty < k < \infty$ に対して

$$\tilde{Q}_B^{in}(k) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \tilde{Q}_A^{in}(k) + \operatorname{sgn}(k) \frac{i}{g} \tilde{P}_A^{in}(k) \quad (6.7.164)$$

$$\tilde{P}_B^{in}(k) = \operatorname{sgn}(k) \frac{i}{g} \tilde{Q}_A^{in}(k) - \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} \tilde{P}_A^{in}(k) \quad (6.7.165)$$

となる。逆フーリエ変換

$$\tilde{Q}_A^{in}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+g^2)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} Q_A(v)e^{ikv} dv \quad (6.7.166)$$

$$\tilde{P}_A^{in}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+g^2)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} P_A(v)e^{ikv} dv \quad (6.7.167)$$

により，元の座標空間での表式は

$$\begin{aligned} Q_B^{in}(v) &= \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Q_A^{in}(v) + i \frac{(1+g^2)^{1/4}}{\sqrt{2\pi}g} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(k) \tilde{P}_A^{in}(k) e^{-ikv} dk \\ &= \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Q_A^{in}(v) + \frac{1}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(v-v') P_A^{in}(v') dv' \end{aligned} \quad (6.7.168)$$

$$\begin{aligned} P_B^{in}(v) &= -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} P_A^{in}(v) + i \frac{(1+g^2)^{1/4}}{\sqrt{2\pi}g} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(k) \tilde{Q}_A^{in}(k) e^{-ikv} dk \\ &= -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} P_A^{in}(v) + \frac{1}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(v-v') Q_A^{in}(v') dv' \end{aligned} \quad (6.7.169)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{i(1+g^2)^{1/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(k) \tilde{P}_A^{in}(k) e^{-ikv} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(k) e^{-ik(v-v')} dk \right) P_A^{in}(v') dv' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(v-v') P_A^{in}(v') dv' \end{aligned} \quad (6.7.170)$$

$$\begin{aligned} \Delta(v-v') &\equiv \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(k) e^{-ik(v-v')} dk \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{v-v'+i\epsilon} + \frac{1}{v-v'-i\epsilon} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Pv} \frac{1}{(v-v')} \end{aligned} \quad (6.7.171)$$

と表した。Pv は，積分で極を跨ぐ際にコーシーの主値をとることを示す記号である。

$Q_A^{in}(v), P_A^{in}(v)$ が領域 $[v_1, v_2]$ に局在しているとき， $v \gg v_2$ では

$$Q_B^{in}(v) \sim \left(\frac{1}{g\pi} \int_{v_1}^{v_2} P_A^{in}(v') dv' \right) \frac{1}{v} \quad (6.7.172)$$

$$P_B^{in}(v) \sim \left(\frac{1}{g\pi} \int_{v_1}^{v_2} Q_A^{in}(v') dv' \right) \frac{1}{v} \quad (6.7.173)$$

となり， $1/v$ に比例するテールを持ちうることがわかる。

蒸発過程を考える場合には鏡は最終的に静止し，入射波はすべて鏡に当たるので

$$Q_i^{out}(u) \equiv -Q_i^{in}(p(u)) \quad (i = A, B) \quad (6.7.174)$$

$$P_i^{out}(u) \equiv -P_i^{in}(p(u)) \quad (i = A, B) \quad (6.7.175)$$

を導入すると,

$$\hat{Q}_i = \int_{-\infty}^{\infty} Q_i^{out}(u) \hat{\Pi}_{out}(u) du \quad (6.7.176)$$

$$\hat{P}_i = \int_{-\infty}^{\infty} P_i^{out}(u) \hat{\Pi}_{out}(u) du \quad (i = A, B) \quad (6.7.177)$$

と out 演算子の言葉で書けて, パートナーの公式は

$$Q_B^{out}(u) = \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Q_A^{out}(u) + \frac{1}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(p(u) - p(u')) P_A^{out}(u') \partial_{u'} p(u') du' \quad (6.7.178)$$

$$P_B^{out}(u) = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} P_A^{out}(u) + \frac{1}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(p(u) - p(u')) Q_A^{out}(u') \partial_{u'} p(u') du' \quad (6.7.179)$$

となる.

量子エンタングルメントが強い状態, すなわち g が十分大きいとき, (6.7.178), (6.7.179) の第 2 項は第 1 項に比べ無視できるほど小さくなり, $Q_B^{out}(u) \sim Q_A^{out}(u)$, $P_B^{out}(u) \sim -P_A^{out}(u)$ となる. これは A と B が空間的に大きな重なりをもつことを示しているため, 自然な結果といえる.

実際にブラックホールの蒸発過程を模した動的鏡模型に適用するために, 鏡の軌跡として,

$$p(u) = \begin{cases} u - \frac{1}{\kappa} & (-\infty < u \leq 0) \\ -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa u} & (0 < u \leq h) \\ (-\frac{1}{\kappa} + u - h) e^{-\kappa h} & (h < u < \infty) \end{cases} \quad (6.7.180)$$

を考える. この軌跡は $u \leq 0$ までは静止していた鏡が $u = 0$ から動き出し, Hawking 輻射を出しながら加速度運動したのち, $u = h$ で再び静止するといった軌跡である.

A を Hawking 輻射のモードであるとすれば, $Q_A^{out}(u)$, P_A^{out} は $[0, h]$ でのみ非零の値をもつと考

えてよい。この Hawking 輻射の純粋化パートナーは

$$\begin{aligned}
Q_B^{out}(u) &= \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Q_A^{out}(u) + \frac{\kappa}{g\pi} P_V \int_0^h \frac{P_A^{out}(u')}{1 + \kappa e^{\kappa u'} p(u)} du' \\
&= \begin{cases} \frac{\kappa}{g\pi} P_V \int_0^h \frac{P_A^{out}(u')}{1 + (\kappa u - 1) e^{\kappa u'}} du' & (-\infty < u \leq 0) \\ \frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Q_A^{out}(u) + \frac{\kappa}{g\pi} P_V \int_0^h \frac{P_A^{out}(u')}{1 - e^{-\kappa(u-u')}} du' & (0 < u \leq h) \\ \frac{\kappa}{g\pi} P_V \int_0^h \frac{P_A^{out}(u')}{1 + (\kappa(u-h) - 1) e^{\kappa(u'-h)}} du' & (h < u < \infty) \end{cases} \quad (6.7.181)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_B^{out}(u) &= -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} P_A^{out}(u) + \frac{\kappa}{g\pi} P_V \int_0^h \frac{Q_A^{out}(u')}{1 + \kappa e^{\kappa u'} p(u)} du' \\
&= \begin{cases} \frac{\kappa}{g\pi} P_V \int_0^h \frac{Q_A^{out}(u')}{1 + (\kappa u - 1) e^{\kappa u'}} du' & (-\infty < u \leq 0) \\ -\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} P_A^{out}(u) + \frac{\kappa}{g\pi} P_V \int_0^h \frac{Q_A^{out}(u')}{1 - e^{-\kappa(u-u')}} du' & (0 < u \leq h) \\ \frac{\kappa}{g\pi} P_V \int_0^h \frac{Q_A^{out}(u')}{1 + (\kappa(u-h) - 1) e^{\kappa(u'-h)}} du' & (h < u < \infty) \end{cases} \quad (6.7.182)
\end{aligned}$$

のように各領域で求めることができる。

SSP となるのは、 $0 < u \leq h$ の値が 0 になるときであるから、

$$\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} Q_A^{out}(u) = -\frac{\kappa}{g\pi} P_V \int_0^h \frac{P_A^{out}(u')}{1 - e^{-\kappa(u-u')}} du' \quad (6.7.183)$$

$$\frac{\sqrt{1+g^2}}{g} P_A^{out}(u) = \frac{\kappa}{g\pi} P_V \int_0^h \frac{Q_A^{out}(u')}{1 - e^{-\kappa(u-u')}} du' \quad (6.7.184)$$

が成り立つときである。 $P_A^{out}(u)$ を消去すれば、

$$P_V \int_0^h du' P_V \int_0^h du'' \frac{Q_A^{out}(u'')}{(1 - e^{-\kappa(u-u')})(1 - e^{-\kappa(u'-u'')})} = -\frac{\pi^2}{\kappa^2} (1+g^2) Q_A^{out}(u) \quad (6.7.185)$$

の $Q_A^{out}(u)$ に対する固有値方程式になる。この固有値方程式を解き $Q_A^{out}(u)$ を求め、(6.7.184) から $P_A^{out}(u)$ を決めれば、SSP となる A を求めることができる。

図 17~20 は $Q_A^{in}(v)$, $P_A^{in}(v)$ をある範囲に局在した関数として与えたときに、その純粋化パート

ナーである $Q_B^{in}(v)$, $P_B^{in}(v)$, および鏡に反射され輻射として放出される $Q_A^{out}(u)$, $P_A^{out}(u)$ とその純粋化パートナー $Q_B^{out}(u)$, $P_B^{out}(u)$ を表したものである。

$Q_A^{in}(v)$, $P_A^{in}(v)$ は $q_A^{in}(v) = \frac{(1+2\sigma^2)}{5\sigma(2\sigma^2-1)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} v e^{-\frac{(v+5)^2}{2\sigma^2}}$, $p_A^{in}(v) = v e^{-(v+5)^2}$ (図 15) をシンプレクティック変換して得た. $\sigma > 0$ は重み関数のおよその幅を決めるパラメーターで, 図 16 は AB 間の量子エンタングルメントエントロピー S の σ 依存性を示している. ここでは鏡の軌跡は $p(u) = -e^{-u}$ で与えており, $Q_B^{in}(v)$, $P_B^{in}(v)$ のうち $v \geq 0$ の部分は鏡に当たらず地平面に落ちる成分となる.

$Q_A^{out}(u)$, $P_A^{out}(u)$ と $Q_B^{out}(u)$, $P_B^{out}(u)$ は空間的に重なりを持つ, SOP であることがわかる.

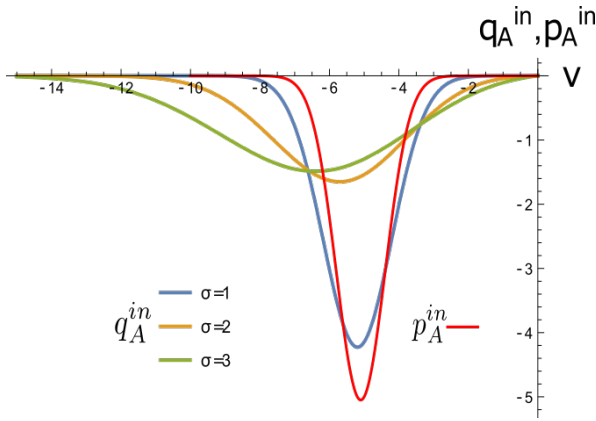


図 15 $q_A^{in}(v)$ と $p_A^{in}(v)$

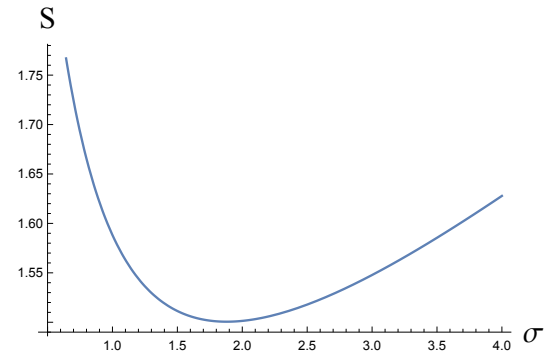


図 16 AB 間の量子エンタングルメントエントロピー S の σ 依存性

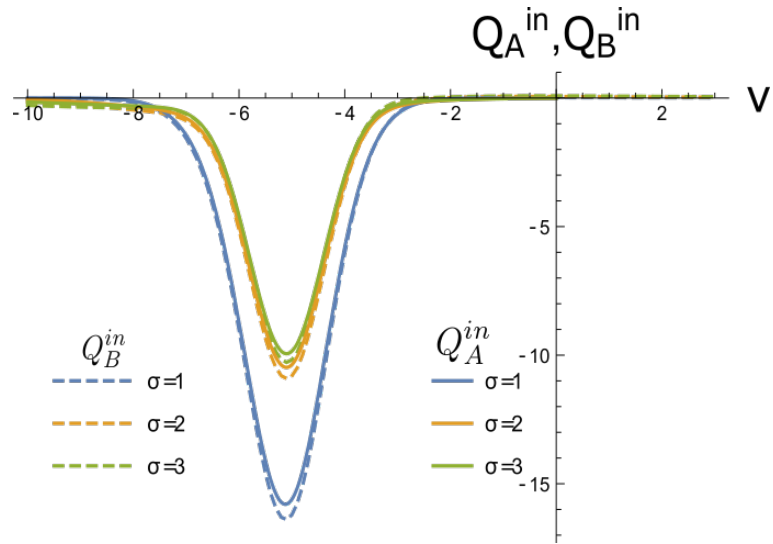


図 17 $Q_A^{in}(v)$ と $Q_B^{in}(v)$

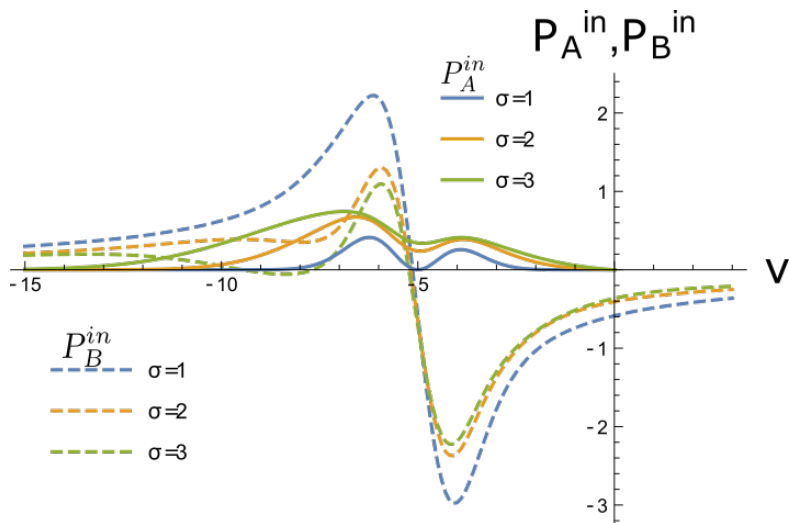


図 18 $P_A^{in}(v)$ と $P_B^{in}(v)$

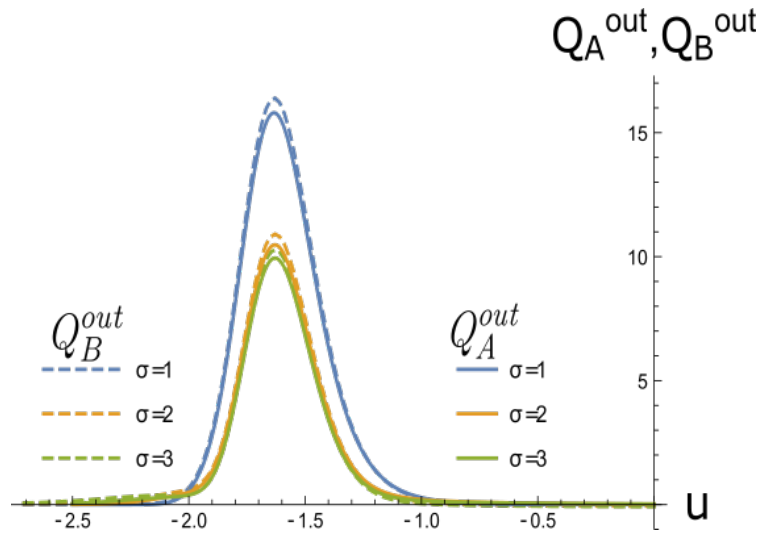


図 19 $Q_A^{out}(u)$ と $Q_B^{out}(u)$

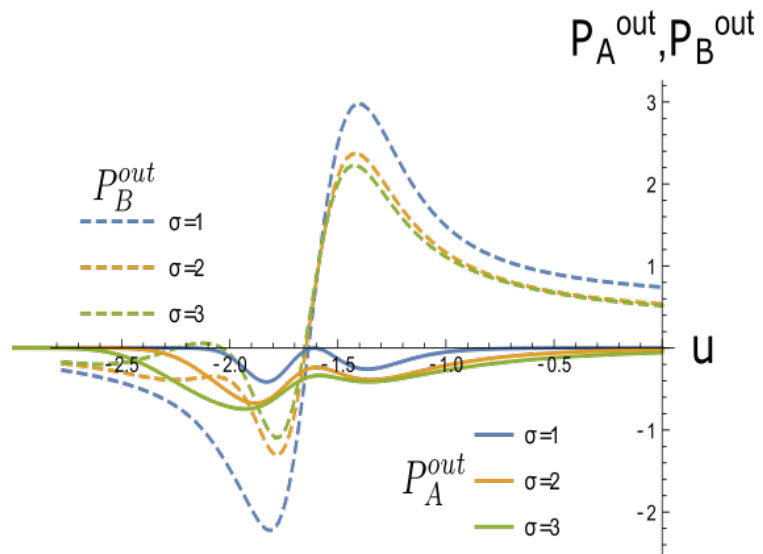


図 20 $P_A^{out}(u)$ と $P_B^{out}(u)$

7 まとめと今後の展望

本論文では、ブラックホールの情報損失問題において、ユニタリー性を保つためには Hawking 輻射と量子的にエンタングルし、状態を純粋化するパートナーが必要であるという立場から、ブラックホールの蒸発過程を模した動的鏡模型を用いてこの純粋化パートナーについて論じた。先行研究では、ある部分系が与えられたときにその純粋化パートナーを求める公式が Gauss 状態の場合に構築され、純粋化パートナーが一般には空間的に重なりを持つクラスであるということが示されたが、今後の課題としては、第 6 章で触れたような動的鏡模型での純粋化パートナーの解析を進めることがある。例えばパートナーの鏡の軌跡のパラメーター依存性を調べることで、ブラックホールの性質とパートナーにはどのような関係があるのか、あるいは重力崩壊を起こした物質の情報は蒸発過程でどこに蓄えられるのか等を調べることが挙げられる。

また、先行研究のパートナー公式は Gauss 状態の場合に限られたものであるから、さらに幅広く現実的な状況に対応するためにも非 Gauss 状態の場合に公式がどのように変更を受け、パートナーの振る舞いがどのように変化するかを調べることは有意義であると考えられる。

加えて、純粋状態は量子情報が外部に漏れない系であるから、純粋化パートナーを用いることで現実の量子暗号や量子コンピュータで使われるプロトコルの効率化、量子系からの情報の取り出し方、あるいは逆に系への蓄積の仕方等、工学への応用も見据えた新たな手法が考えられる可能性もある。

謝辞

所属する素粒子宇宙理論グループのスタッフの皆様には大変お世話になり、修士1年のゼミを見て下さった綿村哲教授，研究を熱心に指導して下さった堀田昌寛助教，成子篤助教には特に深く感謝いたします。

先輩であるD1の山口幸司さんには研究，プライベートを含め数えきれないほどの助言を頂き，同期である関谷君，三浦君からは学部4年生の頃から今日に至るまで物理に限らず多くのことを学ばせてもらいました。

また，所属する宇宙創成物理学国際共同大学院からは，研究的・経済的支援をして頂き心より感謝いたします。

最後に，私をここまで育て，温かく見守ってくれた家族には心からの感謝をもって謝辞とさせていただきます。

付録 A (S3) の証明

合成系 AB に対し，測定後の状態が純粋状態となる A の一般測定を考える．この測定に対応する測定演算子を \hat{M}_{kA} とする．測定結果 k を得る確率 $p(k)$ は

$$p(k) = \langle \Psi |_{AB} \hat{M}_{kA}^\dagger \hat{M}_{kA} | \Psi \rangle_{AB} \quad (\text{A.1})$$

であり，測定後の状態 $|\Psi(k)\rangle_{AB}$ は

$$|\Psi(k)\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{p(k)}} \hat{M}_{kA} | \Psi \rangle_{AB} \quad (\text{A.2})$$

となる．測定後の状態を平均化した状態

$$\hat{\rho}_{AB} \equiv \sum_k p(k) |\Psi(k)\rangle_{AB} \langle \Psi(k)|_{AB} \quad (\text{A.3})$$

を考える．測定結果 k を得た場合の B の縮約状態

$$\hat{\rho}(k)_B = \text{Tr}_A [|\Psi(k)\rangle_{AB} \langle \Psi(k)|_{AB}] \quad (\text{A.4})$$

を用いると，

$$\text{Tr}_A [\hat{\rho}_{AB}] = \sum_k p(k) \hat{\rho}(k)_B \quad (\text{A.5})$$

と表される．一方で

$$\begin{aligned} \text{Tr}_A [\hat{\rho}_{AB}] &= \text{Tr}_A \left[\sum_k \hat{M}_{kA} | \Psi \rangle_{AB} \langle \Psi |_{AB} \hat{M}_{kA}^\dagger \right] \\ &= \text{Tr}_A \left[\left(\sum_k \hat{M}_{kA}^\dagger \hat{M}_{kA} \right) | \Psi \rangle_{AB} \langle \Psi |_{AB} \right] \\ &= \text{Tr}_A [|\Psi\rangle_{AB} \langle \Psi|_{AB}] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

であるから，

$$\text{Tr}_A [|\Psi\rangle_{AB} \langle \Psi|_{AB}] = \sum_k p(k) \hat{\rho}(k)_B \quad (\text{A.7})$$

ここで von-Neumann エントロピーを $0 \leq x \leq 1$ で定義される関数 $f(x) = -x \ln x$ を用いて $\text{Tr}[f(\hat{\rho})]$ と表すと，凹性より

$$\text{Tr} \left[f \left(\sum_n p(n) \hat{\rho}(n) \right) \right] \geq \sum_n p(n) \text{Tr}[f(\hat{\rho}(n))] \quad (\text{A.8})$$

が成り立つ．これより

$$\begin{aligned} S(|\Psi\rangle_{AB}) &= \text{Tr}_B \left[f \left(\sum_k p(k) \hat{\rho}(k)_B \right) \right] \\ &\geq \sum_k p(k) \text{Tr}_B [f(\hat{\rho}(k)_B)] = \sum_k p(k) S(|\Psi\rangle(k)_{AB}) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

が示される.

以上の議論は B に関しても同様である. よって (S3) が示された. \square

付録 B (S3') の証明

1 回目の A の測定により状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ が確率 $p_{k_1}^{(1)}$ で状態 $|\Psi_1(k_1)\rangle_{AB}$ に変化したとすると, (S3) より

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) \geq \sum_{k_1} p_{k_1}^{(1)} S(|\Psi_1(k_1)\rangle_{AB}) \quad (\text{B.1})$$

が成り立つ. 次に状態 $|\Psi_1(k_1)\rangle_{AB}$ にある B に対し k_1 に依存する測定を行って確率 $p(k_1)_{k_2}^{(2)}$ で状態 $|\Psi_2(k_1 k_2)\rangle$ になったとすると, 同様に

$$S(|\Psi_1(k_1)\rangle_{AB}) \geq \sum_{k_2} p(k_1)_{k_2}^{(2)} S(|\Psi_2(k_1 k_2)\rangle_{AB}) \quad (\text{B.2})$$

(B.1), (B.2) より

$$S(|\Psi\rangle_{AB}) \geq \sum_{k_1 k_2} p_{k_1}^{(1)} p(k_1)_{k_2}^{(2)} S(|\Psi_2(k_1 k_2)\rangle_{AB}) \quad (\text{B.3})$$

を得る. 始状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ から A と B を交互に測定し, N 回目の測定後に状態 $|\Phi\rangle_{AB}$ になったとすると, (B.3) と同様にして

$$\begin{aligned} S(|\Psi\rangle_{AB}) &\geq \sum_{k_1 k_2 \cdots k_N} p_{k_1}^{(1)} p(k_1)_{k_2}^{(2)} \cdots p(k_1 k_2 \cdots k_{N-1})_{k_N}^{(N)} S(|\Psi_N(k_1 k_2 \cdots k_N)\rangle_{AB}) \\ &= S(|\Phi\rangle_{AB}) \sum_{k_1 k_2 \cdots k_N} p_{k_1}^{(1)} p(k_1)_{k_2}^{(2)} \cdots p(k_1 k_2 \cdots k_{N-1})_{k_N}^{(N)} = S(|\Phi\rangle_{AB}) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

ここで測定後の状態 $|\Psi_N(k_1 k_2 \cdots k_N)\rangle_{AB}$ が $|\Phi\rangle_{AB}$ であるという仮定と, 確率分布の規格化

$$\sum_{k_1 k_2 \cdots k_N} p_{k_1}^{(1)} p(k_1)_{k_2}^{(2)} \cdots p(k_1 k_2 \cdots k_{N-1})_{k_N}^{(N)} = 1 \quad (\text{B.5})$$

を用いた. 以上より (S3') が示された. \square

付録 C ユニタリ群上の積分

ユニタリ行列の多項式の不変 Haar 測度上での積分は

$$\begin{aligned}
 \int dU &= 1 \\
 \int dU U_{ij} U_{kl}^\dagger &= \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \\
 \int dU U_{ij} U_{kl} U_{mn}^\dagger U_{op}^\dagger &= \frac{1}{N^2 - 1} (\delta_{in} \delta_{kp} \delta_{jm} \delta_{lo} + \delta_{ip} \delta_{kn} \delta_{jo} \delta_{lm}) \\
 &\quad - \frac{1}{N(N^2 - 1)} (\delta_{in} \delta_{kp} \delta_{jo} \delta_{lm} + \delta_{ip} \delta_{kn} \delta_{jm} \delta_{lo}) \\
 &\quad \dots
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

となる. U と U^\dagger の個数が異なる場合の積分はすべて 0 である.

付録 D A のシンプレクティック変換

純粋状態にある合成系 AB は局所シンプレクティック変換で共分散行列が (2.10.112) の形に変換することができる。 A の純粋パートナー B を見つける際、まず A の局所シンプレクティック変換で A の共分散行列を

$$M_A = \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

の形に変換しておく必要がある。ここではそのような局所シンプレクティック変換 S_A の構成法を述べる。

$$S_A = \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\sigma & 0 \\ 0 & e^{-\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

で

$$\begin{pmatrix} \hat{Q}_A \\ \hat{P}_A \end{pmatrix} = S_A \begin{pmatrix} \hat{q}_A \\ \hat{p}_A \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

とシンプレクティック変換し、変換後の A の共分散行列が

$$M_A = \frac{\sqrt{1+g^2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

なったとする。このとき変換前の A の共分散行列 m_A とは

$$m_A = S_A^{-1} M_A (S_A^T)^{-1} \quad (\text{D.5})$$

で繋がっている。 $\theta' = 0$ にとると

$$S_A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sigma} & 0 \\ 0 & e^\sigma \end{pmatrix}, \quad (S_A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\sigma} & 0 \\ 0 & e^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

であるから、

$$e^{-2\sigma} \cos^2 \theta + e^{2\sigma} \sin^2 \theta = \frac{2}{\sqrt{1+g^2}} \langle \hat{q}_A^2 \rangle (\equiv \rho_q) \quad (\text{D.7})$$

$$-(e^{2\sigma} - e^{-2\sigma}) \cos \theta \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{1+g^2}} \text{Re} \langle \hat{q}_A \hat{p}_A \rangle (\equiv \rho_{qp}) \quad (\text{D.8})$$

$$e^{2\sigma} \cos^2 \theta + e^{-2\sigma} \sin^2 \theta = \frac{2}{\sqrt{1+g^2}} \langle \hat{p}_A^2 \rangle (\equiv \rho_p) \quad (\text{D.9})$$

となる。これを θ, σ について解くと、

$\rho_{qp} \neq 0$ のとき、

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\rho_q - \rho_p}{\sqrt{r}} \right) \quad (\text{D.10})$$

$$e^{2\sigma} = \frac{1}{2} (\rho_q + \rho_p \pm \sqrt{r}) \quad (\text{D.11})$$

$$r = (\rho_q + \rho_p)^2 - 4 \quad (\text{D.12})$$

$\rho_{qp} = 0$ のとき,

$$\theta = 0 \tag{D.13}$$

$$e^{2\sigma} = \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_q}} \tag{D.14}$$

と求まり, S_A を構成することができる.

付録 E 時空のエネルギー

等価原理により時空に特別な対称性がない限りは局所的なエネルギーは一般に定義できない。しかし時空が漸近的領域を有し、そこで近似的に対称性が存在する場合、それに付随したエネルギーを定義することができる。

ここでは特に漸近的平坦な時空の場合に定義されるエネルギーについて述べる。この場合無限遠方で ∂/∂_t が Killing ベクトルとなるのでそれに付随したエネルギーを定義する。

漸近的に平坦な時空の無限遠方における計量を

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (\text{E.1})$$

とする。ここで $\eta_{\mu\nu}$ は Minkowski 時空の計量で $h_{\mu\nu}$ はそこからのずれを表す。

4次元時空の場合 $h_{\mu\nu} = \mathcal{O}(\frac{1}{r})$ と期待される。このとき Einstein 方程式 $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ は次の Pauli-Fierz 方程式になる

$$\partial^\alpha \partial_\alpha h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h_\alpha^\alpha - \partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha - \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha = -16\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T) \quad (\text{E.2})$$

両辺のトレースをとって

$$\partial^\alpha \partial_\alpha h - \partial_\beta^\alpha h_\alpha^\beta = 8\pi GT \quad (\text{E.3})$$

ここで $h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, $T \equiv \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ である。

物質を塵状のものに限ると、圧力は 0 で、 $T_{0i} = T_{ij} = 0$ 。さらに空間的無限遠方に伝搬する物質や重力波はないとすると時空は十分静的であると近似できて、 $\partial_t h_{\mu\nu} = 0$ 。この仮定のもとで (E.2) の $\mu = \nu = 0$ 成分は

$$\partial^i \partial_i h_{00} = -8\pi GT_{00} \quad (\text{E.4})$$

(E.3) は

$$-\partial^i \partial_i h_{00} + \partial_i (\partial_j h^{ij} - \partial^i h_j^j) = -8\pi GT_{00} \quad (\text{E.5})$$

となり、合わせると、

$$\partial_i (\partial_j h^{ij} - \partial^i h_j^j) = 16\pi GT_{00} \quad (\text{E.6})$$

よってエネルギーは

$$E = \int d^3x T_{00} = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \partial_i (\partial_j h^{ij} - \partial^i h_j^j) \quad (\text{E.7})$$

で与えられる。ここで積分は $t = \text{一定面}$ の全空間に渡る体積積分である。

Gauss の法則よりこれは表面積分でかけて

$$E = \frac{1}{16\pi G} \int_{S_\infty} dS_i (\partial_j h^{ij} - \partial^i h_j^j) \quad (\text{E.8})$$

これを ADM エネルギーと呼ぶ。

注意として、ここでの表式は無限遠方で張られる座標が正規直交座標となるものを使ったものであるから、任意の座標では

$$E = \frac{1}{16\pi G} \int_{S_\infty} dS_i (D_j h^{ij} - D^i h_j^j) \quad (\text{E.9})$$

となる。ここで D_i は $t = \text{一定面}$ における共変微分である。

具体的に Schwarzschild 解の場合に ADM エネルギーを求めてみる。

遠方で正規直交座標になる座標系を用いるために Schwarzschild 解を次の等方座標と呼ばれる座標系で書く

$$ds^2 = - \left[\frac{1 - \frac{GM}{2\rho}}{1 + \frac{GM}{2\rho}} \right] dt^2 + \left(1 + \frac{GM}{2\rho} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{E.10})$$

ここで $\rho = \sqrt{\delta x^i x^j}$ である。このとき

$$h_{ij} \sim \frac{2GM}{\rho} \delta_{ij} \quad (\text{E.11})$$

) であるから ADM エネルギーは

$$E = \frac{1}{16\pi G} 4\pi \rho^2 \frac{x_i}{\rho} \left(-2GM \frac{x^i}{\rho^3} + 6GM \frac{x^i}{\rho^3} \right) = M \quad (\text{E.12})$$

となり、Schwarzschild 時空の ADM エネルギーは質量 M であることが分かる。

参考文献

- [1] 堀田昌寛, 『量子情報と時空の物理』, 数理科学 SGC ライブラリ **103** (サイエンス社)
- [2] Don N. Page, “Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, nonrotating hole”, *Phys. Rev.* **D13**, 198 (1976)
- [3] Don N. Page, “Average entropy of a subsystem”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1291, (1993)
- [4] Christoph Holzhey, Finn Larsen, Frank Wilczek, “Geometric and renormalized entropy in conformal field theory”, *Nucl. Phys.* **B424**, 443 (1994)
- [5] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes”, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199-220 (1975)
- [6] Alessio Serafini, “Quantum Continuous Variables”, *CRC Press*
- [7] Michael A. Neislen, Isaac L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information”, *Cambridge University Press*
- [8] J. Williamson, “On the Algebraic Problem Concerning the Normal Forms of Linear Dynamical Systems”, *Am. J. Math.*, **58**, 141, (1936)
- [9] Don N. Page, “Time Dependence of Hawking Radiation Entropy”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, (2013)
- [10] Don N. Page, “Information in black hole radiation”, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 3743, (1993)
- [11] Don. Page, “Black Hole Information”,
Proceedings of the 5th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics, (1993)
- [12] Frank Wilczek, “Quantum Purity at a Small Price: Easing a Black Hole Paradox”, in Proceedings of Houston Conference on Black Holes, Membranes, Wormholes and Superstrings, ed. S. Kalara and D. Nanopoulos, *World Scientific*, Singapore, (1992)
- [13] E. H. Lieb, M. B. Ruskai, “Proof of the strong subadditivity of quantum - mechanical entropy”, *Phys. Rev. Lett.* ; *J. Math. Phys*, **30**, 434, (1973)
- [14] W. G. Unruh, “Notes on black-hole evaporation”, *Phys. Rev.* **D 14**, 870 (1976)
- [15] G. D. Birkoff, “Relativity and modern physics”, *Harvard University Press*, Harvard, United Staes, (1923)
- [16] S. W. Hawking, J. B. Hartle, “Energy and angular momentum flow into a black hole”, *Commun. Math. Phys.* **27**, 283, (1972)
- [17] J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking, “The Four laws of black hole mechanics”, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161, (1973)
- [18] S. W. Hawking, “Breakdown of predictability in gravitational collapse”, *Phys. Rev.* **D14**, 2460, (1976)
- [19] S. W. Hawking, “Information Loss in Black Holes”, *Phys. Rev.* **D72**, 084013, (2005)

- [20] Y. Aharonov, A. Casher, S. Nussinov, “The unitarity puzzle and Planck mass stable particles”, *Phys. Lett.* **B191**, 51, (1987)
- [21] J. Trevison, K. Yamaguchi, M. Hotta, “Spatially Overlapped Partners in Quantum Field Theory”, arXiv:gr-qc/1807.03467v4, (2018)
- [22] J. Trevison, K. Yamaguchi, M. Hotta, “Pure State Entanglement Harvesting in Quantum Field Theory”, arXiv:quant-ph/1808.01764, (2018)
- [23] A. Strominger, C. Vafa, “Microscopic Origin of the Bekenstein Hawking Entropy”, arXiv:hep-th/9601029v2, (1996)
- [24] N. Birrell, P. Davis, “Quantum field in curved space”, *Cambridge University Press*, Cambridge (1984)
- [25] P. Townsend, “Black Holes”, arXiv:gr-qc/9707012, (1997)
- [26] H. S. Reall, “Part3: Black holes”, Lectures notes given as part of the Cambridge University Mathematical Tripos (2014)
- [27] J. D. Bekenstein, “Black Holes and Entropy”, *Phys. Rev.* **D7**, 2333, (1973)
- [28] J. D. Bekenstein, “Generalized second law of thermodynamics in black hole physics”, *Phys. Rev.* **D9**, 3292, (1974)
- [29] M. Hotta, R. Schützhold, W. G. Unruh, “Partner particles for moving mirror radiation and black hole evaporation”, *Phys. Rev.* **D91**, 124060, (2015)
- [30] D. Harlow, “Jerusalem Lectures on Black Holes and Quantum Information”, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 015002, (2016)
- [31] M. Hotta, A. Sugita, “The fall of the black hole firewall: natural nonmaximal entanglement for the Page curve”, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2015, 12, (2015)
- [32] T. Sagawa, “Second law-like inequalities with quantum relative entropy: An introduction”, arXiv:cond-mat.stat-mech/1202.0983, (2012)
- [33] R. Simon, “Pres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable System”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726, (2000)
- [34] Lu-Ming Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, P. Zoller, “Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722, (2000)
- [35] J. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231, (1998)
- [36] B. C. Hall, “Quantum Theory for Mathematicians”, Graduate Texts in Mathematics, 267, Springer, (2013)
- [37] B. Reznik, “Entanglement From the Vacuum”, *Foundations of Physics* 33.1, 167, (2003)
- [38] M. Hotta, M. Shino, M. Yoshimura, “Moving Mirror Model of Hawking Evaporation”, *Progress of Theoretical Physics*, **91**, 5, (1994)
- [39] M. R.R. Good, P. R. Anderson, C. R. Evans, “Time Dependence of Particle Creation

- from Accelerating Mirrors”, *Phys. Rev.* **D 88**, 025023, (2013)
- [40] M. R.R. Good, P. R. Anderson, C. R. Evans, “Mirror reflections of a black hole”, *Phys. Rev.* **D 94**, 065010, (2016)
- [41] W. G. Unruh, R. M. Wald, “What happens when an accelerating observer detects a Rindler particle”, *Phys. Rev.* **D 29**, 1047, (1984)
- [42] R. M. Wald, “General Relativity”, *The University of Chicago Press*, (1984)
- [43] E. Martin-Martinez, E. G. Brown, W. Donnelly, A. Kempf, “Sustainable entanglement production from a quantum field”, *Phys. Rev.* **A 88**, 052310, (2013)
- [44] S. Camalet, “Monogamy Inequality for Any Local Quantum Resource and Entanglement”, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 110503, (2017)
- [45] V. Coffman, J. Kundu, W. K. Wootters, “Distributed entanglement”, *Phys. Rev.* **A61**, 052306, (2000)
- [46] T. R. Oliveira, M. F. Cornelio, F. F. Fanchini, “Monogamy of entanglement of formation”, *Phys. Rev.* **A89**, 034303, (2014)
- [47] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, “Quantum Entanglement”, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009)
- [48] R. Carlitz, R. Willey, “Reflections on moving mirrors”, *Phys. Rev.* **D36**, 2327, (1987)
- [49] V. Vedral, M. B. Plenio, “Entanglement measure and purification procedure”, *Phys. Rev.* **A57**, 1619, (1998)
- [50] S. A. Fulling, P. C. W. Davies, “Radiation from a moving mirror in two dimensional space-time: conformal anomaly”, *Proc. R. Soc. Lond.* **A348**, 393-414, (1976)
- [51] P. C. W. Davies, S. A. Fulling, “Radiation from moving mirrors and from black holes”, *Proc. R. Soc. Lond.* **A356**, 237-257, (1977)
- [52] M. R.R. Good, K. Yelshibekova, Y. C. Ong, “On horizonless temperature with accelerating mirror”, *J. High Energ. Phys.*, (2017)
- [53] A. Higuchi, S. Iso, K. Ueda, K. Yamamoto, “Entanglement of the Vacuum between Left, Right, Future, and Past: The Origin of Entanglement-Induced Quantum Radiation”, *Phys. Rev.* **D96**, 083531, (2017)
- [54] S. DeWITT, “Quantum Field Theory in Curved Spacetime”, *Physics Reports*, **19**, 6, 295-357, (1975)
- [55] X. Wang, T. Hiroshima, A. Tomita, M. Hayashi, “Quantum information with Gaussian states”, *Physics Reports*, **448**, 1-4, 1-111, (2007)